Simone Cuconato

Metodi Logici 1

Teoria degli Insiemi, Logica del Primo Ordine,
Tableaux Analitici, Calcolo dei Sequenti

IL Sileno Edizioni

Philosophies of Communication

SIMONE CUCONATO

Metodi Logici 1

Teoria degli Insiemi, Logica del Primo Ordine,
Tableaux Analitici, Calcolo dei Sequenti

Philosophies of Communication

Open Access Peer Reviewed Series

IL Sileno Edizioni

Metodi Logici 1
Teoria degli Insiemi, Logica del Primo Ordine, Tableaux Analitici, Calcolo dei Sequenti

Simone Cuconato
Dipartimento di Fisica
Università della Calabria
Rende (CS), Italia

A monographic volume of the Open Access and peer-reviewed series
"Philosophies of Communication"
(Il Sileno Edizioni), **ISSN 2975–2515**
http://www.ilsileno.it/philosophiesofcommunication

Cover: Immagine generata con AI dall'autore Simone Cuconato
Curatela Editoriale: Simone Cuconato (composizione tipografica con LaTeX)

1ª edizione, ottobre 2025

Copyright © 2025 by Il Sileno Edizioni
International Scientific Publisher "Il Sileno", VAT 03716380781
Via Piave, 3/A, 87035 - Lago (CS), Italy, e-mail:
ilsilenoedizioni@gmail.com
This work is distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - No derivative 4.0 International License.

The work, including all its parts, is protected by copyright law. The user at the time of downloading the work accepts all the conditions of the license to use the work, provided and communicated on the website
https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/

ISBN 979–12–800–6486–8

Ai miei genitori

Philosophies of Communication

Open Access Peer Reviewed Series

IL Sileno Edizioni

Philosophies of Communication
Open Access and Peer-Reviewed series

Editor-In-Chief:

Marianna Boero, Department of Communication Sciences, University of Teramo (Italy);

Valeria Dattilo, Department of Architecture, D'Annunzio University (Chieti-Pescara, Italy);

Editorial Board:

Ambra Benvenuto, Libera Università di Lingue e Comunicazione, IULM (Milan, Italy);

Francesca Cruciani, Department of Human Sciences, Lumsa University (Rome, Italy);

Orlando Paris, Department of Humanities, University for Foreigners of Siena (Italy);

Ivana Lozo, Department of Tourism and Communication Studies, University of Zadar (Croatia);

Cristina Greco, University of Business and Technology, Jeddah (Saudi Arabia);

International Scientific Board:

Tobe Berkovitz, Faculty of Communications, Boston University (USA);

Paolo Demuru, Post-Graduate Program in Communicationì, Paulista University, São Paulo (Brazil);

Riccardo Finocchi, Department of Letters and Philosophy, University of Cassino and Southern Lazio (Italy);

Otero Alonso Isaías, Departament de Ciències de la Comunicació, Universitat Jaume I, Castelló de la Plana (Spain);

Zarko Paick, Department of Media Studies University of Zagreb (Croatia);

Maria Angela Polesana, Department of Communication, Arts and Media "Giampaolo Fabris", IULM University (Milan, Italy);

Emilio Rossi, Department of Architecture, D'Annunzio University (Chieti-Pescara, Italy);

Stefano Traini, Department of Communication Sciences, University of Teramo (Italy);

J*osé Vicente Villalobos Antúnez*, Universidad del Alba (Chile); Universidad del Zulia (Venezuela);

Jan Visnovsky, Faculty of Mass Media Communication, University of SS. Cyril and Methodius, Trnava (Slovakia).

Editorial Assistants, Graphic Project and Layout Design: Michela Damiano

Website: `https://www.ilsileno.it/philosophiesofcommunication/`

The international open access book series *Philosophies of Communication*, edited by "Il Sileno Edizioni" publisher, will discuss the new processes of communication from a wide range of fields, including semiotics, anthropology, sociology, psychology economics, education, history, law, linguistics, political science, literature, criminology, medicine, and so on. Each of these disciplines has its roots in a different theoretical and epistemological tradition, which can contribute to the advancement of research in communication. The aim is to analyze the complex relationship between media, technologies, society and culture, promoting a trans-disciplinary approach.
Philosophies of Communication is open to analyses of all forms of communication. Possible topics include: advertising, brand communication, fashion, politics, sport, tourism, sport, public discourses, television, journalism, video-sharing platforms, blogs, social media, spaces of consumption, art, music, museums, events, scientific communication, technology. Particular attention will be paid to the innovation that occurs in the border areas among the various disciplines interested in the study of communication.
normalsizeThis book series publishes online volumes, both collective volumes and monographs, which are set in the perspective of providing reflections, work materials and experimentation in the fields of research and education about communication. Typically, authors and editors will come from the academic field but some of the books may also be relevant for professionals in the field of communication, such as creatives, marketers, communicators, designers, and so on.
Books may be based on specific research projects or publish contributions of a relevant conference (proceedings).

Published volumes are subject to a review process (double-blind peer review) to ensure their scientific rigor.
The volume proposals can be presented in English, Italian, French or Spanish. The choice of digital Open Access format is coherent with the flexible structure of the series, in order to facilitate the direct accessibility and usability by both authors and readers.
The series is divided into three sections: Monographs, Collective Volumes, Special Volumes. Normally, two collective volumes are published each year, in the months of March/April and November/December. Usually, the collective volumes are linked to Calls for Book Chapters (proposed by scholars identified by the editors and the editorial board), which are disseminated in the scientific community at least one year before the publication of each related volume. The monographic volumes are published without precise timing, but according to the proposals submitted during the year.
Submitted contributions are subjected to a double-blind-peer-review; evaluation and acceptance procedure. It is always possible to propose Call for Volumes on significant topics in the field of communication studies by sending a proposal to the following e-mail address: `philosophiesofcommunication@gmail.com`

Logical Methods 1
Set Theory, First-Order Logic, Analytic Tableaux, Sequent Calculi

Simone Cuconato
Department of Physics, University of Calabria, Rende (CS), Italy
simone.cuconato@unical.it

Abstract: The purpose of *Logical Methods 1* is to provide the reader with a rigorous and comprehensive introduction to the fundamental concepts of first-order logic. The volume pays particular attention to: *i*) the mathematical methods underlying logical systems and the analytical proof of theorems; *ii*) the presentation of numerous examples and exercises on the method of analytical tableaux (standard and block proofs in sequent notation) and on sequent calculus; and *iii*) the historical-epistemological context in which mathematical logic was born and developed. The topics covered have been selected for their national and international relevance, ranging from set theory to the syntactic and semantic notions of propositional and predicate logic, from proof theory and first-order models to the analytical proof of their main metatheorems. The book is designed to be used by students of mathematics, philosophy, computer science, and engineering.

Keywords: Mathematical Logic; First-Order Logic; Proof Theory; Model Theory; Analytic Tableaux; Sequent Calculi.

Author: Simone Cuconato is a Postdoctoral Researcher in Logic in the Department of Physics at the University of Calabria, and an Adjunct Professor of Applied Mathematics and Computer Science for Health Sciences at the same university. He is also a Visiting Lecturer in Mathematical Logic at the University of Florence. He earned an MPhil in Logic from the Catholic University of Milan under the supervision of Sergio Galvan, and subsequently completed a PhD in ICT (*curriculum*: computer science and engineering) at the Department of Computer Engineering, Modeling, Electronics and Systems at the University of Calabria and at the Institute of Informatics and Telematics (IIT)-CNR in Pisa. In 2023, he won the Poster Competition (Technical-Scientific Area) at the first PhD Day organized by the University of Calabria, and was later awarded the Best Paper Prize at the international conference ICANTCI 2024. He has also conducted research at the IIT-CNR in Pisa, the Department of Computer Applications at Chitkara University, and the Department of Computer Science at MSCB University. His research interests lie in proof theory, modal logic, artificial intelligence and philosophy and history of mathematics.

Metodi Logici 1
Teoria degli Insiemi, Logica del Primo Ordine, Tableaux Analitici, Calcolo dei Sequenti

Simone Cuconato
Dipartimento di Fisica, Università della Calabria, Rende (CS), Italia
simone.cuconato@unical.it

Abstract: Lo scopo di *Metodi Logici 1* è fornire al lettore un'introduzione rigorosa ed esauriente ai concetti fondamentali della logica del primo ordine. Il volume presta particolare attenzione: *i*) ai metodi matematici dei sistemi di logica e alla dimostrazione analitica dei teoremi; *ii*) alla presentazione di numerosi esempi ed esercizi sul metodo dei tableaux analitici (standard e a blocchi nella notazione a sequenti) e sul calcolo dei sequenti; e *iii*) al contesto storico-epistemologico in cui è nata e si è sviluppata la logica matematica. Gli argomenti trattati sono stati scelti per la loro rilevanza a livello nazionale e internazionale, spaziando dalla teoria degli insiemi alle nozioni sintattiche e semantiche della logica proposizionale e predicativa, dalla teoria della dimostrazione e dei modelli del primo ordine, fino alla dimostrazione analitica dei loro principali metateoremi. Il libro si rivolge a studenti di matematica, filosofia, informatica e ingegneria.

Keywords: Logica Matematica; Logica del Primo Ordine; Teoria della Dimostrazione; Teoria dei Modelli; Tableaux Analitici; Calcolo dei Sequenti.

Autore: Simone Cuconato è ricercatore postdoc in Logica presso il Dipartimento di Fisica dell'Università della Calabria, dove insegna Matematica e Informatica Applicate alle Scienze della Salute. Inoltre, è *visiting lecturer* in Logica Matematica presso l'Università di Firenze. Dopo gli studi in Logica presso l'Università Cattolica di Milano, sotto la supervisione di Sergio Galvan, ha conseguito il Dottorato di Ricerca in ICT (curriculum: *computer science and engineering*) presso il Dipartimento di Ingegneria Informatica, Modellistica, Elettronica e Sistemistica dell'Università della Calabria e l'Istituto di Informatica e Telematica (IIT)–CNR di Pisa. Nel 2023 ha vinto la *Poster Competition* (Area Tecnico-Scientifica) durante il primo *PhD Day* organizzato dall'Università della Calabria e, nel 2024, il *Best Paper Prize* durante la conferenza internazionale ICANTCI 2024. Ha inoltre svolto attività di ricerca presso l'IIT–CNR di Pisa, il Dipartimento di *Computer Applications* della *Chitkara University* e il Dipartimento di *Computer Science* della *MSCB University*. I suoi interessi di ricerca includono la teoria della dimostrazione, le logiche modali, l'intelligenza artificiale e la filosofia e la storia della matematica.

Die theoretische Logik, auch mathematische oder symbolische Logik genannt, ist eine Ausdehnung der formalen Methode der Mathematik auf das Gebiet der Logik.

(La logica teorica, chiamata anche logica matematica o simbolica, è un'estensione del metodo formale della matematica al campo della logica.)

– David Hilbert e Wilhelm Ackermann,
Grundzüge der Theoretischen Logik, 1928

Indice

Prefazione 1

Introduzione 3

1 Elementi di teoria degli insiemi 15
1.1 Alle origini del concetto di insieme 15
1.2 Insiemi e relazioni 17
1.3 Funzioni 29
1.4 Teorema di Cantor e principio di induzione matematica 32

2 Logica proposizionale 49
2.1 La formalità della logica 49
2.2 Sintassi della logica proposizionale 52
2.3 Semantica della logica proposizionale 61
2.4 Modelli e valutazioni 69
2.5 Tableaux analitici 73
2.6 Insiemi di Hintikka 86
2.7 Correttezza e completezza dei tableaux analitici 88

3 Calcolo dei sequenti 101
3.1 Teoria della dimostrazione: il contesto storico-epistemologico 101
3.2 Calcolo dei sequenti per la logica proposizionale classica 114
3.3 Metateoremi 122
3.4 Calcolo dei sequenti per la logica proposizionale intuizionistica 133
3.5 L'analiticità delle dimostrazioni 137

4 Logica del primo ordine 143
4.1 Il linguaggio della logica del primo ordine 143
4.2 Sintassi della logica del primo ordine 147
4.3 Semantica della logica del primo ordine 152

4.4 Tableaux analitici per la logica del primo ordine 160
4.5 Calcolo dei sequenti e tableaux analitici a blocchi 170

Riferimenti bibliografici 183

Prefazione

Nel commemorare Anne Troelstra (1939-2019), uno dei grandi logici del nostro tempo, Johan van Benthem e Dick de Jongh hanno sintetizzato il suo genio nella capacità di "*creating order*". Questa osservazione rispecchia l'essenza stessa della logica, che può essere intesa come la "scienza dell'ordine" per eccellenza, avendo il compito di strutturare formalmente il ragionamento identificando schemi validi di inferenza, e di organizzare le conoscenze in sistemi coerenti e completi.

La necessità di "creare ordine", che ha definito il genio di Troelstra, è ciò che ha ispirato il presente volume, riflettendo tale esigenza da una duplice prospettiva. La prima, di natura personale, mira a sistematizzare le conoscenze dell'autore in logica: un percorso avviato con le lezioni di Logica tenute da Sergio Galvan in *teoria della dimostrazione* sull'*Hauptsatz* di Gentzen, durante l'anno accademico 2014/2015, nell'aula "Sofia Vanni Rovighi" dell'Università Cattolica di Milano. Il percorso è proseguito con una tesi di Laurea Magistrale in Logica sui fondamenti e la filosofia della matematica proprio sotto la supervisione di Sergio Galvan, ed è continuato con una tesi di Dottorato in Logica Matematica e Computazionale. La seconda prospettiva, invece, consiste nel riorganizzare e ampliare le note preparatorie al corso di Istituzioni di Matematica – incentrato sulla logica matematica e la topologia generale – che l'autore ha tenuto presso l'Università della Calabria nel secondo semestre dell'anno accademico 2023/2024.

In tal modo, il volume si pone come un ponte tra il rigore della teoria e la sua applicazione didattica, riflettendo la duplice anima di un'indagine tanto profonda quanto ordinata.

Cosenza, ottobre 2025 *Simone Cuconato*

Introduzione

Lo studio sistematico della logica ha radici antiche che affondano nel *modello del sapere greco*. Tale modello può essere sinteticamente schematizzato così: per giungere a una conoscenza profonda e adeguata di una data realtà, non è sufficiente accertarne l'esistenza e descrivere come è fatta, ma è indispensabile comprendere *perché* esiste ed è fatta *così come* ci appare. A tal fine, è necessario andare oltre l'esperienza immediata e far ricorso alla ragione, la quale chiarisce che ciò che constatiamo non è casuale ma è riconducibile a un quadro esplicativo più ampio entro cui risulta *spiegabile*.

A partire dal Sesto secolo a.C., nel pensiero greco si manifesta l'esigenza di rendere esplicite le ragioni attraverso una *dimostrazione*. La dimostrazione permette di distinguere l'*opinione* (*dóxa*) dal *sapere* (*epistéme*). Per i Greci l'*epistéme* era una conoscenza che poggiava su fondamenti incrollabili e, dunque, in grado di produrre verità definitive; al contrario della *dóxa*, che per sua natura era soggettiva, mutevole e quindi intrinsecamente fallibile. Cosa differenzia il sapere fondato dall'opinione e qual è la vera natura dell'*epistéme*? Quest'ultima domanda è la stessa che Socrate rivolge al giovane matematico Teeteto nell'omonimo dialogo di Platone (428-348 a.C.):

> SOCRATE: Ebbene, il punto che mi lascia perplesso, e su cui non riesco da me a farmi un'idea chiara, è precisamente questo: che cos'è conoscenza? Siamo in grado di darne la definizione? (*Teeteto*, 202 b-c)

Ancora Platone nel dialogo *Menone*, specifica che la conoscenza necessita di "un ragionamento che ne mostri la ragione". Pertanto, il termine greco *epistéme*, benché comunemente tradotto con "scienza", nella filosofia greca significava il sapere nel senso più autentico. Scrive Evandro Agazzi:

> [...] secondo il modello di conoscenza esplicitamente teorizzato dalla filosofia greca, il sapere si raggiunge solo quando, dopo aver appurato una verità, si è anche in grado di darne la ragione, ossia di darne il *perché*. Non è esagerato quindi sostenere che con i Greci si introduce nella civiltà "l'invenzione del perché". (Agazzi 2024, p. 28)

Dunque la conoscenza scientifica per i Greci può essere definita come *opinione vera accompagnata da ragione*, ossia, in termini moderni, la conoscenza scientifica è *credenza vera giustificata*. Cosa significa, però, giustificata? L'atto di "giustificare", o di "dare le ragioni", o "mostrare il perché", fu definito dai Greci come l'atto di fornire una *dimostrazione*. Da Aristotele (384-322 a.C.) in poi, la dimostrazione è intesa come una concatenazione di proposizioni in cui la verità delle premesse si trasmette necessariamente alle conclusioni. Sebbene filosofi e matematici avessero già una lunga pratica di simili ragionamenti, fu solo Aristotele a renderli oggetto di un'esauriente teoria: la *logica*. Lo Stagirita pose l'accento sull'aspetto della *teoresi*, e a lui va certamente riconosciuto il merito di aver identificato le forme di alcuni schemi deduttivi corretti e, più in generale, di aver ricondotto a teoria le tecniche di inferenza: la *sillogistica*. A partire dalla sistemazione aristotelica, il sapere autentico è un sapere dimostrativo, fondato su precisi schemi deduttivi, e la logica è considerata lo *strumento* (*organon*) essenziale della conoscenza in generale.

Il modello epistemico Greco, dunque, per produrre verità definitive ha bisogno di due elementi: *i*) un modo sicuro per *immettere* la verità nel sistema della conoscenza, attraverso *proposizioni prime* che sono immediatamente riconosciute come vere; e *ii*) un metodo certo per trasmettere la verità delle proposizioni prime a tutte le altre proposizioni. Questo modello trova la sua massima espressione nel primo trattato di geometria della storia: gli *Elementi* di Euclide (300 a.C. circa). Nel "programma euclideo", come è stato chiamato dal filosofo della scienza Imre Lakatos (1922-1974), gli *assiomi* sono proposizioni prime necessariamente vere in quanto *autoevidenti*. Dagli assiomi, la deduzione conduce in modo necessario e infallibile a *conclusioni* vere:

> [...] le proposizioni in cima al sistema (assiomi) sono espresse mediante termini il cui significato è perfettamente noto, la verità viene infallibilmente iniettata negli assiomi attraverso l'intuizione intellettuale e fluisce verso il basso lungo i sicuri canali del ragionamento deduttivo inondando l'intero sistema. (Lakatos 1962 (1978), p. 36)

Questa è esattamente l'idea classica di conoscenza scientifica. Aristotele, più di chiunque altro, studiò la teoria generale del ragionamento deduttivo e scientifico, dedicando alla prima gli *Analitici Primi*, mentre alla seconda gli *Analitici Secondi*:

> È anche necessario che la conoscenza scientifica ottenuta per dimostrazione proceda da premesse prime, vere, immediate, più note, anteriori e tali che siano ragioni della conclusione. (*Analitici Secondi (Organon)*, 71-b)

Per questi motivi, si può comprendere perché la civiltà greca abbia prodotto una ricchissima matematica, a fronte di una fisica quasi trascurabile, con la sola eccezione dell'astronomia, che era del resto considerata una sorta di grande applicazione della geometria:

> Paradossalmente, la ragione di questo fatto risiede nell'eccesso di perfezione, cui si ispirava il modello della ricerca di un sapere assolutamente certo, universale e necessario, sicuro nei suoi fondamenti grazie a un impianto rigorosamente deduttivo. [. . .] Per le matematiche, infatti, lo schema classico era perfettamente applicabile (in quanto in esse gli assiomi si potevano ritenere "verità primitive" in base a cui giustificare i teoremi) mentre, per le ragioni anzi dette, esso appare una camicia di forza poco adatta alle scienze empiriche. (Agazzi 2024, p. 32)

Il modello del sapere classico, quindi, si basa su un impianto *rigorosamente deduttivo*, a sua volta epistemologicamente (e metafisicamente) fondato sulla possibilità di avere *evidenza immediata* dei postulati, ovvero la possibilità di *intuire l'essenza delle cose*. In questo approccio si radica il razionalismo greco, che è poi rimasto il tratto distintivo (anche se non esclusivo) dello stile intellettuale dell'Occidente.

Se da un lato, è corretto dire che la logica trovi in Aristotele il suo fondatore, dall'altro, non si può che condividere la critica che nel 1928 Albert Thoralf Skolem (1887-1963) mosse, in occasione di una conferenza tenuta alla Società Matematica Norvegese, contro Immanuel Kant (1724-1805). Quest'ultimo aveva dichiarato nella *prefazione alla seconda edizione* della *Critica della ragion pura* che "la logica è conclusa e compiuta", dato che "da Aristotele in poi essa non ha dovuto fare alcun passo indietro" e "fino a oggi non ha potuto fare alcun passo avanti" (Kant 1781/87, p. 25). Al contrario, Skolem precisò che: "esiste un nuovo calcolo logico, o logica matematica, elaborato soprattutto dai matematici".

Difatti, tra la fine dell'Ottocento e i primi anni del Novecento la logica si consolida come oggetto di studio da un punto di vista matematico. Storiograficamente, si traccia in genere un primo percorso che va da Gottlob Frege (1848-1925) a Bertrand Russell (1872-1970), coprendo il periodo dal 1879 al 1910, includendo anche figure fondamentali come George Boole (1815-1864) e Giuseppe Peano (1858-1932). Questo percorso conduce all'invenzione dei linguaggi simbolico-formali, alla formulazione del sistema logico dei *Principia Mathematica* e alla nascita della *filosofia analitica*. Nonostante l'importanza dei *Principia*[1], si dovrà attendere il 1928 per la pubblicazione del primo manuale contemporaneo di logica matematica: i *Grundzüge der Theoretischen Logik* (*Fondamenti di Logica Teorica*) di David Hilbert (1862-1943) e Wilhelm Ackermann (1896-1962). Questo testo, frutto anche dell'intenso lavoro del più fidato collaboratore di Hilbert, Paul Bernays (1888-1977), che a partire dall'anno accademico 1917/1918 tenne corsi annuali sui "Principi di matematica e logica" all'Università di Göttingen, condivide con i *Principia* l'interesse per i *fondamenti della matematica*. A differenza del lavoro di Russell e Whitehead, però, i *Grundzüge* si basano su tre problematiche interne e indipendenti della matematica: l'assiomatizzazione della

[1] La distinzione tra logica del primo e del secondo ordine è stata elaborata proprio a partire dalla monumentale opera di Russell e Alfred North Whitehead (1861-1947), pubblicata in tre volumi tra il 1910 e 1913.

teoria degli insiemi, lo sviluppo dell'algebra della logica, consolidata come disciplina da Ernst Schröder (1841-1902), e la proposta di Hilbert di una fondazione della matematica basata sulla natura e sul ruolo del *metodo assiomatico*.

Infatti, a partire dal *Congresso Internazionale dei Matematici* di Parigi nel 1900, in cui Hilbert presentò una collezione di 23 problemi fondazionali[2], divenne chiaro che il destino delle scienze matematiche era strettamente legato allo sviluppo della logica matematica: il processo di una *matematica per la logica* concise con quello di una *logica per la matematica*. I problemi sollevati da Hilbert hanno innescato una profonda riflessione epistemologica sui processi giustificativi della matematica, contribuendo allo sviluppo di un accesso dibattito sui suoi fondamenti. Il cosiddetto programma di Hilbert, pur avendo avuto vita breve, ha svolto un ruolo decisivo. Ha catalizzato un vasto spettro di contributi e interessi e, soprattutto, ha posto il metodo assiomatico come il motore della conoscenza matematica. Per il *formalismo* Hilbertiano, la sola dimostrazione di non contraddittorietà (*consistenza*) di una teoria assiomatica è di per sé un criterio sufficiente a stabilire l'esistenza dei concetti coinvolti nella formulazione dei suoi assiomi.

Il programma di Hilbert ebbe simbolicamente fine nel settembre del 1930, durante il secondo congresso sull'*epistemologia e le scienze esatte*, organizzato a Königsberg (oggi Kaliningrad) dalla *Gesellschaft für empirische Philosophie* (Società per la filosofia empirica). In quell'occasione, un giovane studioso di nome Kurt Gödel (1906-1978), fresco del titolo di dottore di ricerca conseguito sotto la supervisione di Hans Hahn (1879-1934), presentò i famosi *teoremi di incompletezza*. Grazie a Gödel, si comprese che il programma di Hilbert non solo non era stato ancora realizzato, ma che in linea di principio non sarebbe stato possibile farlo.

Oggi la logica è un settore fortemente interdisciplinare – al crocevia tra filosofia, matematica e informatica – che trae beneficio dai contributi di discipline quali l'algebra, la topologia e la geometria, e svolge un ruolo fondazionale non solo nella matematica contemporanea – gran parte della quale si fonda su una *metamatematica* basata sulla logica – ma anche nell'informatica e, nella più attuale, intelligenza artificiale[3].

Più in dettaglio, la logica matematica poggia su quattro pilastri: la teoria degli insiemi, la teoria dei modelli, la teoria della dimostrazione e la teoria della calcolabilità (o computabilità). In questo volume ci concentreremo su tre di essi: la teoria degli insiemi, la teoria dei modelli e la teoria della dimostrazione. Nello specifico, da un lato, ci limiteremo alla logica del prim'ordine, in linea con il carattere introduttivo del volume; dall'altro, dato il ruolo centrale della deduzione nel testo, presenteremo due distinti approcci "dimostrazionistici": la *truth-theoretic semantics* e la *proof-theoretic semantics*. La *truth-theoretic semantics*, o "semantica vero-condizionale", definisce il

[2] Problemi che ruotavano attorno a due principali sfide: la dimostrazione della *coerenza* (non contraddittorietà) della teoria dei numeri reali e la necessità di risolvere le contraddizioni emerse nella teoria degli insiemi di Georg Cantor (1845-1918).

[3] La logica fornisce formalismi essenziali per la rappresentazione della conoscenza, il ragionamento automatico e la verifica dei sistemi intelligenti.

significato delle espressioni del linguaggio logico in termini di *verità*; al contrario, la *proof-theoretic semantics*, o "semantica dimostrazionistica", definisce il significato delle espressioni del linguaggio logico in termini di *dimostrazioni*. Questi due approcci corrispondono ai due principali modi di definire la correttezza di un argomento, riconducibili a due diverse tradizioni: la prima si basa sulla teoria dei modelli, la seconda sulla teoria della dimostrazione.

Nella teoria dei modelli, si stabilisce una corrispondenza tra espressioni sintattiche ed elementi di strutture formali attraverso funzioni di interpretazione. A seconda del tipo di strutture adottate (algebriche, categoriali, relazionali), si ottengono diverse varianti di semantica. Indipendentemente dalle loro specificità, il comune denominatore di questo approccio è l'ordine concettuale secondo cui, a partire dall'interpretazione scelta, si definisce – à la Alfred Tarski (1902-1983) – la verità di un'espressione per induzione sulla sua struttura; successivamente, si introduce la nozione di conseguenza logica come preservazione della verità sotto tutte le possibili interpretazioni; infine, si caratterizza la prova come una sequenza di passi che garantiscono il mantenimento della conseguenza logica a partire da verità assiomatiche. Questo è l'approccio tradizionale adottato in molti manuali di logica matematica divenuti ormai dei classici, come quello di Mendelson (1964), in cui la nozione di derivabilità formale è considerata secondaria rispetto a quella di conseguenza logica.

Al contrario, nella semantica dimostrazionistica, la nozione di prova è primaria e la verità è definita in funzione di essa. Questo approccio trova le sue origini nell'interpretazione di Brouwer-Heyting-Kolmogorov delle costanti logiche, che fornisce "condizioni sufficienti per stabilire la dimostrabilità di una proposizione in termini della dimostrabilità delle sue componenti" (Negri 2015, p. 223).

Nelle pagine che seguono adotteremo il calcolo semantico dei *tableaux analitici* per la semantica vero-condizionale, mentre per la semantica dimostrazionistica introdurremo il *calcolo dei sequenti* di Gerhard Gentzen (1909-1945). In particolare, lo scopo di questo volume è fornire al lettore un'introduzione rigorosa ed esauriente ai concetti fondamentali della logica, prestando particolare attenzione

i) ai metodi matematici dei *sistemi di logica* e alla dimostrazione analitica dei teoremi;
ii) alla presentazione di numerosi esempi ed esercizi sul metodo dei tableaux analitici e sul calcolo dei sequenti;
iii) al contesto storico-epistemologico in cui è nata e si è sviluppata la logica matematica.

I quattro capitoli che compongono questo manuale sono organizzati come segue.

Il CAP. 1 introduce la teoria degli insiemi e le nozioni matematiche preliminari impiegate nel volume. Particolare attenzione è dedicata al linguaggio insiemistico e ai concetti di relazione e funzione. Il capitolo si conclude con la presentazione del Teorema di Cantor e del principio di induzione matematica.

Il CAP. 2 è articolato in tre parti. Nelle prime due, presenteremo la sintassi e la semantica della logica proposizionale, insieme al metodo delle tavole di verità. Nella terza, introdurremo il metodo dei tableaux analitici e gli insiemi di Hintikka, per poi dimostrare due importanti risultati metateorici: il teorema di correttezza e quello di completezza per il metodo dei tableaux.

Il CAP. 3 è dedicato al calcolo dei sequenti, introdotto nel 1934 da Gentzen per rispondere a un'esigenza di maggiore prossimità e rigore della logica rispetto alle forme del ragionamento nella pratica matematica. Dopo aver presentato il contesto storico-epistemologico che ha portato alla nascita della teoria della dimostrazione, il capitolo introduce il calcolo dei sequenti per la logica proposizionale classica e intuizionistica. Per il calcolo classico dimostreremo, in modo dettagliato, i teoremi di correttezza e completezza. Il capitolo si conclude con una sezione sull'analiticità delle dimostrazioni logiche.

Il CAP. 4 amplia e sviluppa il lavoro svolto nei capitoli precedenti estendendolo alla logica dei predicati. Dopo aver introdotto il linguaggio predicativo, definiamo rigorosamente il concetto di *modello*. Successivamente, estendiamo il metodo dei tableaux analitici e del calcolo dei sequenti alla logica dei predicati. Il volume si conclude con una variante del metodo dei tableaux detta *tableaux analitici a blocchi* (nella notazione a sequenti), e dimostriamo come tradurre questa variante nel calcolo dei sequenti.

Percorsi didattici. In base al tipo di corso di laurea si possono prevedere diverse combinazioni di corsi da $30/60$ ore:

1. Matematica (30 ore): capitoli $1 + 2 + 3 + 4$;
2. Filosofia (60 ore): capitoli $1 + 2 + 3 + 4$;
3. Filosofia (30 ore): capitoli $1 + 2 + 3$;
4. Informatica (30 ore): $1 + 2(2.1 - 2.5) + 3(3.2 - 3.3) + 4(4.1 - 4.4)$;
5. Ingegneria Informatica/Elettronica (30 ore): $1 + 2(2.1 - 2.5) + 3.2 + 4(4.1 - 4.4)$.

Avvertenze e convenzioni.

1. Gli esempi e gli esercizi contrassegnati dal simbolo ♠ sono considerati di maggiore difficoltà e richiedono una comprensione più profonda del testo;
2. le definizioni, i teoremi, gli esempi, le note, etc., sono numerati progressivamente all'interno di ogni capitolo;
3. "sse" è l'abbreviazione di "se e solo se";
4. ":=" indica *uguaglianza o equivalenza definitoria* fra due complessi simbolici (espressioni), dove l'espressione a sinistra di $:=$ *sta per* o abbrevia quella a destra;
5. il simbolo $\square$ indica la fine di una dimostrazione (*quod erat demonstrandum*);
6. CAP. sta per "capitolo", FIG. sta per "figura" e TAB. sta per "tabella".

Manualistica di logica. Tra i manuali che hanno maggiormente influenzato questo volume e che possono completare o approfondire quanto qui presentato, citiamo

- *manuali di logica in italiano*: (Galvan 2012), (Agazzi 1964), (Giordani 2016), (Palladino 2004), (Fazio, Ledda & Pra Baldi 2022), (Casari 1997), (Cantini & Minari 2009), (Masini 2023), (Turbanti 2020), (Tarski 1965), (Abrusci & Tortora de Falco 2014, 2018), (Manca 2001), (Varzi, Nolt & Rohatyn 2007), (D'Agostino & Hosni 2024), (Calemi 2024);
- *manuali di logica in inglese*: (Kleene 2003), (van Dalen 2013), (Mendelson 1964), (Iacona 2016), (Marker 2024);
- *approfondimenti di teoria della dimostrazione*: (Troelstra & Schwichtenberg 2000), (Negri & von Plato 2001), (Mancosu, Galvan & Zach 2021), (Negri & von plato 2011), (Prawitz 1965), (von Plato 2013), (Buss 1998), (Cellucci 1978), (Poggiolesi 2011);
- *approfondimenti di teoria dei modelli*: (Marcja & Toffalori 1998), (Hodges 1993), (Marker 2002);
- *approfondimenti di teoria degli insiemi*: (Lolli 2008), (Casalegno & Mariani 2004);
- *approfondimenti storico-fondazionali*: (Bozzi & Mangione 1993), (Borga & Palladino 1997), (Casari 1973), (Lolli 2011), (Galvan 2021), (Bottazzini 2003), (Panza & Sereni 2010), (Franchella 2012), (Berto 2008).

La rinascita della logica in Italia. Per completare questa introduzione, offriamo un breve sguardo alla *rinascita della logica in Italia*. L'espressione "rinascita della logica" si riferisce alla ripresa degli studi nel Paese, avvenuta principalmente a partire dalla prima metà degli anni Sessanta del Novecento. Questo fenomeno fu reso possibile dall'opera di Ludovico Geymonat (1908-1991) e di un gruppo di giovani studiosi interessati agli sviluppi internazionali della logica matematica. Si parla di rinascita perché, dopo i successi internazionali della scuola di Peano, il panorama della ricerca logica in Italia aveva subito un lungo stallo, senza figure di spicco fino all'arrivo di Geymonat.

Formatosi all'Università di Torino, Geymonat si laureò prima in filosofia, nel 1930, con una tesi in filosofia teoretica discussa con Annibale Pastore (1868-1956), e successivamente in matematica, nel 1932, con una tesi in analisi matematica discussa con Guido Fubini (1879-1943), di cui divenne anche assistente per il corso di analisi algebrica a Torino. I suoi interessi per la logica matematica nacquero, con ogni probabilità, durante i suoi studi a Vienna nel 1934, dove si recò per approfondire la filosofia neopositivista e frequentò il *Circolo* di Moritz Schlick (1882-1936). Tornato in Italia, Geymonat diede il via a un'intensa opera di divulgazione sui temi della logica e della filosofia della scienza: nel 1936 pubblicò sulla *Rivista di Filosofia* l'articolo *Logica e Filosofia della Scienza*, a cui seguirono numerose traduzioni e recensioni di opere

internazionali. Il suo impegno per rinnovare la cultura scientifica italiana si manifestò anche nella partecipazione al Centro di Studi Metodologici (CSM), una comunità di ricercatori che iniziò a riunirsi a Torino nell'estate del 1945. Geymonat divenne l'elemento unificatore tra l'area filosofica e quella matematico-scientifica del CSM. Con questa forte visione interdisciplinare, introdusse *elementi di logica* nei suoi corsi, dapprima all'Università di Pavia, dove fu chiamato nel 1953 sulla cattedra di *Storia della Filosofia*, e poi a Milano, dove si spostò nel 1955 per ricoprire la prima cattedra italiana di *Filosofia della Scienza*.

Un incontro cruciale per la rinascita della logica in Italia fu quello tra Geymonat ed Ettore Casari (1933-2019). L'interesse di Casari per la logica nacque quasi per caso: studente di lettere classiche, durante un corso di filosofia morale tenuto da Giulio Preti (1911-1972), si incuriosì in particolare per "quel tipo di scrittura simbolica". Preti lo indirizzò al testo *Nove lezioni di logica simbolica* di Józef Maria Bocheński (1902-1995), il quale aveva tenuto all'Angelicum di Roma il primo corso di logica post-Peano in Italia. Grazie all'incoraggiamento di Preti, Casari si laureò nel 1955 con una tesi sulla logica megarico-stoica, unendo così i suoi studi da grecista al nascente interesse per la logica matematica.

Quello stesso anno incontrò Geymonat e dal loro sodalizio nacque l'impulso fondamentale per la rinascita della logica in Italia. Nel 1955, con l'approvazione di Geymonat, Casari si trasferì a Münster per approfondire i suoi studi. Vi trascorse quasi cinque anni all'*Institut für Mathematische Logik und Grundlagenforschung*, studiando sotto la guida di Hans Hermes, Wilhelm Ackermann e Gisbert Hasenjaeger. Al suo ritorno in Italia, Casari contribuì attivamente alla diffusione della logica: nel 1957 tenne a Torino un corso promosso dal CSM, le cui note divennero i *Lineamenti di logica matematica* pubblicati nel 1960 da Feltrinelli nell'ambito della collana di *Filosofia della Scienza* [4].

Questa collana editoriale, inaugurata proprio nel 1960 e diretta da Geymonat, fu un passaggio essenziale nella rinascita della logica: su questi testi si formarono i primi giovani studiosi italiani. Tra la fine degli anni Cinquanta e l'inizio dei Sessanta, l'opinione accademica si fece più favorevole e un piccolo ma significativo numero di matematici, tra cui Tullio Viola, Bruno de Finetti, Lucio Lombardo Radice e Beniamino Segre, iniziò a nutrire un certo interesse per la logica matematica. Viola, in particolare, riteneva che la decadenza della disciplina in Italia fosse dovuta alla mancata collaborazione tra Peano e Federigo Enriques (1871-1946), e tentò una sintesi originale delle loro posizioni nei suoi corsi di *Matematiche Complementari*.

L'anno accademico 1960/1961 segnò un punto di svolta. A Milano, alcuni neolaureati si avvicinarono alla logica, tra cui Corrado Mangione, che si era laureato in matematica nel 1960 con una tesi di algebra *ante-litteram*, dato che il corso non era

[4] È giusto ricordare che, il primo volume italiano di logica era stato pochi anni prima pubblicato da Alberto Pasquinelli (allievo di Rudolf Carnap), dal titolo *Introduzione alla logica simbolica*, con prefazione di Geymonat.

ancora stato istituito. Mangione, che aveva seguito le lezioni di Geymonat, collaborò come assistente al corso tenuto da Geymonat e Casari. Tra gli studenti di quel corso figurava una giovanissima Maria Luisa Dalla Chiara, laureata in filosofia all'Università di Padova nel 1961. Nel 1960, a Torino, si tenne il III Simposio Internazionale di Storia delle Scienze, a cui partecipò Evandro Agazzi. Agazzi, che aveva studiato a Milano, si era laureato in filosofia all'Università Cattolica nel 1957, sotto la guida di Gustavo Bontadini (1903-1990), e in fisica all'Università Statale nel 1961. Aveva già trascorso un periodo di studio a Oxford, specializzandosi in filosofia della scienza, e a Münster, dove aveva studiato logica matematica e conosciuto Casari. Durante il simposio, Agazzi incontrò Geymonat, che lo invitò a unirsi al gruppo di giovani studiosi interessati alla logica, formando così il primo nucleo del gruppo di Geymonat.

L'anno chiave per la rinascita della logica fu il 1962, quando Agazzi, Casari, Dalla Chiara e Mangione chiesero a Geymonat di istituzionalizzare il gruppo. Nel maggio dello stesso anno, Geymonat presentò al CNR la richiesta ufficiale per l'istituzione del *Gruppo di Logica Matematica*–CNR di Milano.

Subito dopo la sua fondazione, il gruppo si arricchì di nuovi membri, a partire dai due matematici di Firenze, Roberto Magari e Piero Mangani, noti come "i fiorentini". Le riunioni si tenevano regolarmente a Milano, con cadenza quindicinale, il sabato pomeriggio presso l'Università Statale, in Via Festa del Perdono. Già nel 1963, il gruppo si espanse ulteriormente con l'ingresso di Flavio Previale e Bruno Busulini, e un anno dopo si unì anche Carlo Cellucci. Quest'ultimo era entrato in contatto con Geymonat a Roma, grazie all'intercessione di Vittorio Somenzi, durante l'esame di Agazzi per la libera docenza in *Filosofia della Scienza*, che si tenne alla Sapienza ed era presieduta in commissione proprio da Geymonat.

Un aspetto peculiare del *Gruppo di Logica Matematica* di Geymonat fu la sua composizione eterogenea, che univa filosofi (i milanesi) e matematici (i fiorentini e i torinesi). Da un lato, questa diversità rappresentò un punto di forza, creando un clima culturale unico e realmente interdisciplinare. Durante gli incontri, i partecipanti si scambiavano idee e presentavano argomenti di logica di base e di ricerca avanzata, con il chiaro obiettivo di prepararsi sia alla ricerca che all'insegnamento. Dall'altro, questa pluralità di formazioni favorì un contrasto di visioni. A partire dal 1967, Geymonat iniziò a prendere nettamente le distanze dalla logica matematica. Come testimonia Mangione, *arrivò ad assumere atteggiamenti polemici contro quella che era, in un certo senso, una sua "creatura", criticandola per la sua eccessiva specializzazione e la scarsa rilevanza filosofica*. Proprio in quell'anno, Roberto Magari, diventato professore ordinario di Algebra all'Università di Ferrara, subentrò a Geymonat nella direzione del gruppo.

Tra la fine degli anni Sessanta e l'inizio dei Settanta, i logici italiani, uniti dall'esperienza del Gruppo del CNR, iniziarono a organizzarsi nelle diverse università, dando vita a varie scuole. Tra le più importanti si annoverano quelle di Milano, Firenze e Siena.

A Milano, all'Università Statale, la tradizione fu portata avanti nel Dipartimento di Filosofia da Corrado Mangione insieme a Edoardo Ballo, Silvio Bozzi e Giulio Giorello, mentre nel Dipartimento di Matematica da Giancarlo Meloni. Verso la fine degli anni Ottanta, con l'arrivo di Daniele Mundici nel Dipartimento di Informatica, si aprì un'importante nuova linea di ricerca. All'Università Cattolica, invece, Evandro Agazzi tenne ininterrottamente i corsi di *Logica Matematica* e di *Filosofia della Scienza*, ad anni alterni dal 1964 al 1979. La cattedra di *Logica* passò poi al suo allievo Sergio Galvan e, successivamente, ad Alessandro Giordani.

A Firenze, la logica era presente sia nell'*Istituto di Filosofia* sia nell'*Istituto di Matematica*. A Filosofia il gruppo si formò grazie a Casari, che si dedicò alla formazione di giovani ricercatori come Andrea Cantini, Sergio Bernini, Pierluigi Minari, Michele Abrusci, Giovanna Corsi, Gisèle Fischer Servi, Francesco Paoli e Stefania Centrone. Sempre a Firenze, nel 1970, ottenne un incarico di Logica anche Dalla Chiara, che iniziò a dedicarsi alla *logica quantistica*[5]. Anche il gruppo di Matematica fu molto attivo. Sotto la guida di Piero Mangani, si formarono figure come Annalisa Marcja e Sauro Tulipani, a cui si aggiunsero in seguito Francesco La Cava, Donato Saeli, Carlo Toffalori e Giuseppe Pirillo. In un secondo momento, anche Daniele Mundici si unì a questo nucleo di ricerca.

Proprio presso l'Istituto di Matematica a Firenze, nell'anno accademico 1963/1964, Roberto Magari tenne un corso di *Logica* come docente incaricato e, nel 1972, divenne il primo direttore dell'Istituto di Matematica dell'Università di Siena. Dieci anni dopo, Magari fondò la *Scuola di Specializzazione in Logica Matematica* a Siena, con le attività didattiche che iniziarono nell'anno accademico 1983/1984. La Scuola, con esame di ammissione e durata biennale, prevedeva corsi tenuti da docenti italiani e ospiti internazionali. Tra gli studenti ammessi alla prima classe c'era Alessandro Berarducci. I corsi attivati nel primo anno della Scuola furono:

- *Logica I*, tenuto da Dag Prawitz nei primi mesi e successivamente Aldo Ursini e Ralph McKenzie;
- *Teoria degli Insiemi*, tenuto da Roberto Magari e Franco Montagna;
- *Teoria della Ricorsività I*, tenuto da Claudio Bernardi, che fu sostituito da Piergiorgio Odifreddi come docente ospite.

Oltre ai corsi istituzionali, la Scuola organizzava numerosi seminari e conferenze. Collaborarono come docenti anche figure internazionali della logica come Anne Troelstra, Keith Devlin, Dick De Jongh, Laurence Kirby e Angus Macintyre.

Accanto alle scuole di Milano, Firenze e Siena, è giusto ricordare, sinteticamente, anche altre scuole, non citate in precedenza per motivi di spazio, che hanno avuto un ruolo fondamentale. A Torino, la logica ha prosperato soprattutto grazie a Gabriele Lolli. A Pisa, invece, la ricerca ha seguito un percorso particolare, in parte dovuto alla presenza del grande matematico Ennio De Giorgi che, pur non essendo un logico,

[5] Sulle logiche quantistiche si veda (Beneduci, Dalla Chiara, Giuntini & Sergioli 2025).

ha promosso discussioni su questioni fondazionali. Altre scuole importanti si sono sviluppate a Genova (grazie a Evandro Agazzi e in seguito a Marco Borga e Dario Palladino), a Roma (grazie a Corrado Böhm e Carlo Cellucci) e a Padova (grazie a Giovanni Sambin). Ciascuna di queste ha contribuito a diffondere e consolidare la logica nel panorama accademico italiano.

Infine, è interessante notare come negli anni del *Gruppo di Logica Matematica* del CNR (e anche dopo), giovani studiosi e allievi diretti degli ex membri del gruppo furono inviati come ricercatori presso i dipartimenti di filosofia e di matematica di molte altre università italiane. Tra queste, merita una menzione particolare l'Università della Calabria, che ebbe tra i suoi ricercatori e docenti di logica figure come Silvio Bozzi, Marco Mondadori, Carlo Cellucci e Sergio Bernini.

1

Elementi di teoria degli insiemi

Il CAP. 1 introduce la teoria degli insiemi e le nozioni matematiche preliminari impiegate nel volume. Particolare attenzione è dedicata al linguaggio insiemistico e ai concetti di relazione e funzione. Il capitolo si conclude con la presentazione del Teorema di Cantor e del principio di induzione matematica.

1.1 Alle origini del concetto di insieme

Ogni scienza si distingue per gli *oggetti* che indaga e per la *metodologia* che usa per analizzarli. Se da un lato il pensiero greco ha avuto il merito di concepire gli oggetti matematici in modo *autonomo*, dall'altro la loro caratterizzazione come "scienza della quantità", ossia del numero e dello spazio, ha portato nel corso dei secoli e sotto la spinta di precise esigenze epistemologiche, a una definizione sempre più astratta e generale di "oggetto matematico". Senza entrare in dettagli che ci costringerebbero a una digressione troppo lunga, consideriamo un esempio emblematico di questa evoluzione: il concetto di *funzione*. Per Eulero (1707-1783) "una funzione di una quantità variabile è una espressione analitica composta in maniera qualsiasi da quella quantità variabile e da numeri o quantità costanti" (Borga & Palladino 1997, p. 44). Nel Settecento, una funzione era identificata con la sua espressione analitica e si circoscrivevano le funzioni a quelle continue. A Johann Peter Gustav Lejeun Dirichlet (1805-1859), si è soliti attribuire la definizione di funzione come una corrispondenza che assegna a ogni valore di una variabile uno e un solo valore di un'altra variabile. Nell'Ottocento, il concetto di funzione si ampliò notevolmente con l'introduzione delle funzioni integrali e delle funzioni sviluppabili in serie di Fourier, fino alla presentazione, nel 1872 all'Accademia delle Scienze di Berlino da parte di Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897), di funzioni non derivabili in alcun punto. Questo portò i matematici a sentire l'esigenza di una definizione di funzione più generale, capace di includere tutti i nuovi casi. Nacque così la necessità di un linguaggio universale, capace di catturare la crescente varietà degli enti matematici, una premessa cruciale per la nascita della teoria degli insiemi.

Il passaggio decisivo fu però quando nello studio generale delle funzioni – in particolare della loro rappresentazione in serie –, si passò a considerare infiniti punti critici e, conseguentemente, il ruolo cruciale della loro distribuzione spaziale. Iniziò così lo studio degli insiemi infiniti di punti sulla retta, che segnò il vero inizio della teoria degli insiemi. La teoria degli insiemi fu creata, negli ultimi decenni dell'Ottocento, da Georg Cantor (1843-1918), il quale vi fu condotto proprio nel corso di ricerche afferenti all'analisi infinitesimale classica. Non è un caso, infatti, che il primo libro in cui sono stati presentati gli elementi della nascente teoria degli insiemi sia intitolato *Teoria delle Funzioni*, scritto da Émile Borel (1871-1956) e pubblicato nel 1898.

La teoria degli insiemi è estremamente interessante per diverse ragioni. Da un lato, essa costituisce un'estensione significativa della matematica precedente; dall'altro, fornisce un apparato concettuale unitario che permette di sviluppare l'intera matematica (o, almeno, la matematica antecedente alla *teoria delle categorie*). Sia oggetti matematici classici, come i numeri, che oggetti più recenti, come le struttura algebriche e topologiche, possono essere definiti in termini puramente insiemistici e le loro proprietà dedotte da principi puramente insiemistici.

La teoria degli insiemi venne assiomatizzata per la prima volta da un allievo di Hilbert, Ernst Zermelo (1871-1953) nel 1908 e, successivamente, perfezionata definitivamente nella forma nota come ZF (o ZFC con l'*assioma della scelta*) da Adolf Abraham Fraenkel (1891-1965) e Skolem. La volontà di Zermelo di assiomatizzare la teoria era giustificata da almeno due motivi: *i*) il desiderio di evitare i paradossi (già Cantor aveva osservato che era necessario porre una limitazione all'uso del principio di comprensione); *ii*) fornire un contesto unitario per lo studio degli argomenti che erano allora caratteristici per la matematica: i concetti di numero, ordine e funzione.

Infine, per i nostri scopi, esiste una stretta connessione tra la teoria degli insiemi e la logica[1]. Non solo la logica fa un uso essenziale di nozioni e tecniche insiemistiche, ma è proprio nell'indagine sulla struttura della teoria degli insiemi che la logica contemporanea ha trovato alcune delle sue applicazioni più affascinanti.

Non a caso, la terminologia logica e quella insiemistica sono due facce della stessa medaglia: occorre prender confidenza con entrambe e saper passare agilmente dall'una all'altra. Per questo motivo, in questo capitolo faremo abbondante utilizzo dei seguenti simboli logici da intendere come *mere abbreviazioni linguistiche* per i connettivi e quantificatori della lingua italiana che elenchiamo con la loro traduzione

- il simbolo della negazione $\neg$ traduce "non";
- il simbolo della congiunzione $\wedge$ traduce "e";
- il simbolo della disgiunzione $\vee$ traduce "o";
- il simbolo del condizionale $\rightarrow$ traduce "se...allora";
- $\forall$ traduce "per ogni" e si chiama quantificatore universale;
- $\exists$ traduce "esiste" e si chiama quantificatore esistenziale;

[1] Da più di un secolo l'intero edificio matematico è costruito proprio sulla logica e sulla teoria degli insiemi.

- $\exists!$ traduce "esiste ed è unico".

1.2 Insiemi e relazioni

Fornire una definizione rigorosa di *insieme* trascende gli obiettivi del presente volume. Ne assumeremo, dunque, una intuitiva. Un insieme è una *collezione* (o *classe*)[2] arbitraria di *elementi* (o *oggetti*), in numero maggiore o uguale a zero. Indicheremo insiemi ed elementi con $X, Y, A, B, \ldots$ e $x, y, a, b, \ldots$ rispettivamente. Se X è un insieme, scriveremo $x \in X$ se x appartiene a X, cioè se x è un elemento di X. In caso contrario scriveremo $x \notin X$. Un insieme si dice finito se contiene al più un numero finito di elementi e, in tal caso, scriveremo la cardinalità di X con $\#X = n$, se X contiene esattamente n elementi. Un insieme contenente esattamente n elementi è detto n-pla *non ordinata*. Fissiamo, fin da subito, la notazione standard per indicare insiemi canonici di enti matematici

- l'insieme $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ dei *numeri naturali*;
- l'insieme $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ dei *numeri interi*;
- l'insieme $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$ dei *numeri razionali*;
- l'insieme $\mathbb{R}$ dei *numeri reali*, che include tutti i numeri razionali e irrazionali (come π o $\sqrt{2}$)[3].

Un insieme che non è finito si dice infinito. Esempi di insiemi finiti possono essere i numeri naturali da 0 a 10, i libri in una libreria, gli oggetti in una stanza, *etc*. In generale, denoteremo con U l'insieme che rappresenta l'intero universo del discorso, ovvero l'insieme degli elementi a cui possiamo potenzialmente riferirci in un determinato contesto. Questo insieme è detto anche *insieme universo* (o *ambiente*, o *sfondo*)[4].

In generale, un insieme è completamente ed esclusivamente individuato dagli oggetti che ad esso appartengono, secondo i seguenti principi

Principio 1.1. [*Principio di astrazione (o comprensione)*] Una qualsiasi proprietà P determina l'insieme costituito da tutti gli oggetti che soddisfanno P.

Principio 1.2. [*Principio di estensionalità (o di estensione)*] Due insiemi X, Y coincidono (o sono uguali) se contengono gli stessi elementi: $X = Y$.

Principio 1.3. [*Principio di dicotomia*] Dato un oggetto x e un insieme X, necessariamente $x \in X$ oppure $x \notin X$.

---

[2] I termini "insieme", "classe", "collezione" verrano usati come sinonimi in questo capitolo, salvo diversa ed esplicita stipulazione.

[3] I *numeri complessi* $\mathbb{C}$ estendono ulteriormente i numeri reali. Un numero complesso è costituito da una parte reale e una parte immaginaria: $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$. Dove, a è la parte reale, b è la parte immaginaria e i è l'unità immaginaria, definita come la radice quadrata di -1.

[4] Dove non strettamente necessario eviteremo di scrivere l'insieme universo U.

Analizziamo meglio i primi due principi. Il principio di astrazione stabilisce che gli elementi di $\{x \mid P(x)\}$ sono tutti e soli gli oggetti che esemplificano o godono della proprietà espressa da $P(x)$

$$a \in \{x \mid P(x)\} \quad sse \quad P(a)$$

Ad esempio

$$\text{Aristotele} \in \{x \mid x \text{ è un logico}\} \quad sse \quad \text{Aristotele è un logico}$$

$$a \in \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ e } x^2 + 1 = 5\} \quad sse \quad a \in \mathbb{Z} \text{ e } a^2 + 1 = 5$$

Oltre che per astrazione, un insieme può anche essere definito per *enumerazione*. La definizione per enumerazione consiste nell'elencare esplicitamente tutti e soli gli elementi dell'insieme racchiudendoli tra parentesi graffe. Detto diversamente, si ammette di poter formare, a partire da una successione finita di oggetti arbitrari $a_1, \ldots, a_n$, un insieme che contiene esattamente gli elementi della lista e che viene denotato da

$$\{a_1, \ldots, a_n\}$$

Così, potremo indicare l'insieme dei numeri naturali strettamente più piccoli di 3 con $\{0, 1, 2\}$, mentre l'insieme degli autori del *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo* e del *Discorso sul metodo* con {Galileo Galilei, Cartesio}. Una rappresentazione per enumerazione è possibile solo se l'insieme ha un numero finito di elementi: un insieme infinito non potrà mai essere definito esaustivamente attraverso una rappresentazione per enumerazione. L'unico modo per definire un insieme infinito è per astrazione.

Ovviamente, la possibilità di definire un insieme per enumerazione si lascia giustificare sulla base del principio di astrazione, se si dispone anche del concetto di *identità*

$$\{a_1, \ldots, a_n\} := \{x \mid x = a_1 \vee \ldots \vee a_n\}$$

In questo modo

$$\{-2, 2\} = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ e } x^2 + 1 = 5\}$$

Fra gli insiemi finiti vanno menzionati due casi particolari

- *Singoletto* di a: l'insieme che contiene esattamente solo l'elemento a

$$\{a\} := \{x \mid x = a\}$$

- *Insieme coppia* di a e b: l'insieme che contiene i soli elementi a e b

$$\{a, b\} := \{x \mid x = a \text{ o } x = b\}$$

Il principio di estensionalità, invece, determina l'identità fra insiemi

$$X = Y \quad sse \quad \forall x(x \in X \; sse \; x \in Y)$$

Dal principio di estensionalità discende che l'estensione di un insieme non dipende dall'ordine di presentazione dei suoi elementi, né dal numero di occorrenze o molteplicità di essi. Pertanto

$$\{a\} = \{a, a\} = \{a, a, a\} = \{a, a, a, a\} \ldots$$

$$\{a, b\} = \{b, a\} = \{a, b, a, b\} = \{a, a, b, b\} \ldots$$

Per chiarire ulteriormente il concetto, che risulterà utile in vari contesti (soprattutto nel calcolo dei sequenti), si consideri la parola "classe". A essa è naturalmente associata la *sequenza* (o lista) $\langle c, l, a, s, s, e\rangle$, caratterizzata da uno specifico ordine e da una specifica molteplicità delle lettere. Se si invertono la prima e l'ultima lettera, si ottiene una nuova sequenza distinta $\langle e, l, a, s, s, c\rangle$. Se si astrae dell'ordine, ma non dalle singole molteplicità, si ottiene il concetto di *multinsieme* associato alla sequenza, con $\{c, l, a, s, s, e\}$ che coincide con $\{e, l, a, s, s, c\}$. Gli *insiemi* vanno dunque distinti sia dalle sequenze, sia dai multinsiemi. Infatti, $\{c, l, a, s, s, e\}$ visto come insieme può essere anche rappresentato da $\{c, l, a, s, e\}$.

I tre principi, dunque, fissano le condizioni di *identità* e, in parte, le condizioni di *esistenza* degli insiemi. Il principio di estensionalità stabilisce che insiemi con gli stessi elementi sono identici: un insieme è completamente determinato dai suoi elementi. Gli elementi di un insieme possono essere selezionati secondo criteri differenti, ma l'identità dell'insieme dipende soltanto dagli elementi selezionali e non dai criteri di selezione. Il principio di astrazione stabilisce che se un insieme esiste, allora ogni proprietà determina un suo sottoinsieme: se ogni entità che possiede una certa proprietà è un elemento di un insieme, allora esiste un insieme che contiene come elementi esattamente le entità che possiedono la proprietà data[5]. Infine, il principio di dicotomia stabilisce le condizioni di possibilità di un oggetto in relazione a un dato insieme.

Se X e Y sono insiemi, scriveremo $X \subseteq Y$ se X è *sottoinsieme improprio* di Y, ovvero se ogni elemento di X è anche elemento di Y.

Definizione 1.1. [*Inclusione impropria*]

$$X \subseteq Y := \forall z(z \in X \rightarrow z \in Y)$$

o

$$X \subseteq Y := \{z \mid z \in X \rightarrow z \in Y\}$$

[5] Inoltre, tale insieme per il principio di estensione è unico.

Esistono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che sono molto utili e che perciò meritano una notazione speciale, sono gli *intervalli*. Siano a, b due numeri reali

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \quad \text{intervallo aperto: estremi } a, b \text{ esclusi}$$

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \quad \text{intervallo chiuso: estremi } a, b \text{ inclusi}$$

Ovviamente, questa notazione si estende anche a casi *misti*

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \quad \text{intervallo aperto a sinistra e chiuso a destra}$$

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \quad \text{intervallo chiuso a sinistra e aperto a destra}$$

$$(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} \qquad [a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$$

$$(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} \qquad (-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$$

Lemma 1.1. La relazione $\subseteq$ è riflessiva, transitiva e antisimmetrica

- $X \subseteq X$;
- se $X \subseteq Y, Y \subseteq Z$ allora $X \subseteq Z$;
- se $X \subseteq Y, Y \subseteq X$ allora $X = Y$;

Si noti che l'antisimmetria non è altro che il principio di estensionalità. Scriveremo invece $X \subset Y$, con $X \neq Y$, se X è *sottoinsieme proprio* (o *stretto*) di Y.

Definizione 1.2. [*Inclusione propria*]

$$X \subset Y := X \subseteq Y \wedge X \neq Y$$

Denoteremo con $\|$ la *relazione di separazione* tale che dati due insiemi X, Y, X è separato da Y se e solo se nessun elemento di X è un elemento di Y.

Definizione 1.3. [*Separazione*]

$$X \| Y := \{x \mid x \in X \to x \notin Y\}$$

Dati due insiemi, X, Y, indicheremo con $\cup$ l'*unione* di X con Y, l'insieme che contiene gli elementi che sono contenuti in X o in Y; mentre con $\cap$ l'*intersezione* di X con Y, l'insieme che contiene gli elementi che sono contenuti sia in X sia in Y.

Definizione 1.4. [*Unione*]

$$X \cup Y := \{x \mid x \in X \vee x \in Y\}$$

Definizione 1.5. [*Intersezione*]

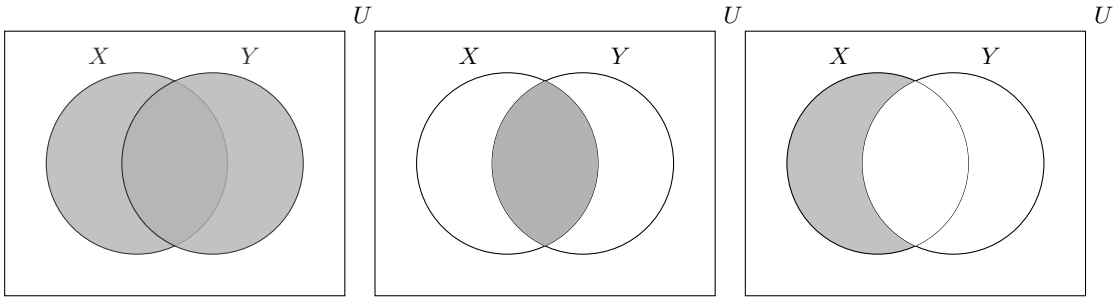
$$X \cap Y := \{x \mid x \in X \wedge x \in Y\}$$

Denoteremo con $X - Y$ l'insieme *differenza*, ossia l'insieme degli elementi di X che non appartengono a Y.

Definizione 1.6. [*Differenza*]

$$X - Y := \{x \mid x \in X \wedge x \notin Y\}$$

In FIG. 1.1 una rappresentazione dell'unione, dell'intersezione e della differenza mediante diagrammi di Eulero:



(a) Unione ($X \cup Y$) (b) Intersezione ($X \cap Y$) (c) Differenza ($X - Y$)

Figura 1.1: Operazioni tra gli insiemi X e Y.

Chiameremo *complemento* di X, scritto X^c, l'insieme $U - X$.

Definizione 1.7. [*Insieme Complementare*] Dato un insieme X in un insieme universo U, $X \subseteq U$, si definisce complementare di X l'insieme

$$X^c = \{x \mid x \in U \wedge x \notin X\}$$

Definizione 1.8. [*Insieme vuoto*]

$$\emptyset := \{x | x \neq x\}$$

Un insieme che non contiene elementi è detto *vuoto*. Come corollario si ottiene che $\emptyset \subseteq X$, per ogni insieme esistente. Infatti, poiché l'insieme vuoto non possiede ele-

menti, tutti gli elementi dell'insieme vuoto sono elementi di qualsiasi altro insieme. Al contrario, l'insieme universo U[6]

Definizione 1.9. [*Insieme universo*]

$$U := \{x \mid x = x\}$$

Le definizioni di differenza e insieme universale ci consentono di definire il *complemento assoluto*; mentre, quelle di differenza e insieme vuoto ci permettono di definire l'*intersezione propria* $\circ$ come la relazione che sussiste tra due insiemi X, Y, quando X interseca Y e nessuno dei due insiemi è incluso nell'altro

Definizione 1.10. [*Complemento assoluto*]

$$-X := U - X = \{x \mid x \notin X\}$$

Definizione 1.11. [*Intersezione propria*]

$$X \circ Y := (X \cap Y \neq \emptyset) \wedge (X - Y \neq \emptyset) \wedge (Y - X \neq \emptyset)$$

Queste operazioni hanno alcune proprietà interessanti

Proposizione 1.1. [*Identità insiemistiche*]

Associatività

$$X \cup (Y \cup Z) = (A \cup Y) \cup Z$$
$$X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$$

Commutatività

$$X \cup Y = Y \cup X$$
$$X \cap Y = Y \cap X$$

Idempotenza

$$X \cup X = X$$
$$X \cap X = X$$

Distributività

$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$$
$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$$

Zero

$$X \cup \emptyset = X$$

[6] U è un insieme che gioca un ruolo cruciale nella derivazione dei paradossi insiemistici.

$$X \cap \emptyset = \emptyset$$

$$X - X = \emptyset$$

Iterando le operazioni di intersezione e unione si può definire l'unione e l'intersezione di tre o più insiemi. L'unione o l'intersezione di tre o più insiemi prende il nome di *famiglia* $\mathcal{F}$ di insiemi, ovvero un insieme $\mathcal{F} = \{X, Y, Z, \ldots\}$ i cui elementi sono a loro volta insiemi.

Definizione 1.12. [*Famiglia di insiemi*] Una famiglia di insiemi $\mathcal{F}$ è un insieme che ha per elementi a sua volta degli insiemi. I simboli

$$\bigcup\{X \mid X \in \mathcal{F}\} \quad \text{e} \quad \bigcup_{X \in \mathcal{F}} X$$

ne denotano l'*unione generalizzata*. Notazioni analoghe, per l'*intersezione generalizzata*

$$\bigcap\{X \mid X \in \mathcal{F}\} \quad \text{e} \quad \bigcap_{X \in \mathcal{F}} X$$

Dati gli elementi $a_1 \in X_1, \ldots, a_n \in X_n$, con $0 < n \in \mathbb{N}$, definiamo la nozione di *n*-upla *ordinata* la sequenza $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, avente come *i*-esimo elemento (o *entrata*, o *coordinata*) a_i, per ogni $1 \leq i \leq n$. Se $n = 2$ avremo il concetto di *coppia ordinata* $\langle a_1, a_2 \rangle$, avente come primo e secondo elemento a_1 e a_2, rispettivamente. Due *n*-uple ordinate $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ e $\langle b_1, \ldots, b_n \rangle$ sono uguali se e solo se $a_i = b_i$, per ogni $1 \leq i \leq n$. Di conseguenza, per $n = 2$ le coppie ordinate $\langle a_1, a_2 \rangle$ e $\langle b_1, b_2 \rangle$ sono uguali se e solo se $a_1 = b_1$ e $a_2 = b_2$.

Definizione 1.13. [*Prodotto cartesiano*] Dati due insiemi X e Y, chiameremo il *prodotto cartesiano* di $X \times Y$ l'insieme delle coppie ordinate $\langle a, b \rangle$ con $a \in X$ e $b \in Y$

$$X \times Y := \{\langle a, b \rangle \mid a \in X, b \in Y\}$$

dove $X \times Y := \{\langle a, b \rangle \mid a \in X, b \in Y\}$ è un'abbreviazione per

$$\{x \mid x = \langle a, b \rangle, \text{ per qualche } a \in X, b \in Y\}$$

Ad esempio, dati i due insiemi $A = \{x, y\}$ e $B = \{1, 2\}$ avremo

$$A \times B = \{\langle x, 1 \rangle, \langle x, 2 \rangle, \langle y, 1 \rangle, \langle y, 2 \rangle\}$$

$$B \times A = \{\langle 1, x \rangle, \langle 1, y \rangle, \langle 2, x \rangle, \langle 2, y \rangle\}$$

Anche il prodotto cartesiano può essere esteso a un numero finito arbitrario di fattori. Dati n insiemi $(n \geq 2)$ $X_1, \ldots, X_n$

$$X_1 \times \ldots \times X_n = \{\langle a_1, \ldots, a_i \rangle \mid a_1 \in X_1, \ldots, X_n\}$$

$X_1 \times X_n$ è l'insieme delle *n*-ple, i cui elementi provengono ordinatamente da $X_1, \ldots, X_n$. Nel caso in cui tutti i fattori del prodotto siano uguali, scriveremo X^n per designare la *potenza cartesiana n*-esima di X

$$\overbrace{X \times \ldots \times X}$$

Ad esempio, dato l'insieme $A = \{2, 4\}$ avremo

$$A^2 = \{\langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 4, 2 \rangle, \langle 4, 4 \rangle\}$$

Com'è noto, l'orgine del concetto di prodotto cartesiano è geometrico: gli elementi a e b della coppia $\langle a, b \rangle$ vengono anche chiamati *coordinate cartesiane*. René Decartes (1596-1650), per primo, ebbe l'idea fondamentale di unificare la geometria e l'algebra utilizzando uno strumento chiamato *sistema di coordinate*.

Definizione 1.14 [*Sistema di coordinate cartesiane sulla retta*] Consideriamo il *piano euclideo*, ossia quello della familiare *geometria euclidea*, e fissiamo nel piano un punto detto *origine* O. Fissiamo poi due rette distinte che passano per il punto O, e le chiamiamo *assi*, su ciascuna stabiliamo un *verso* e una *unità di misura*. Tutti questi elementi insieme, formano un *sistema di coordinate cartesiane*.

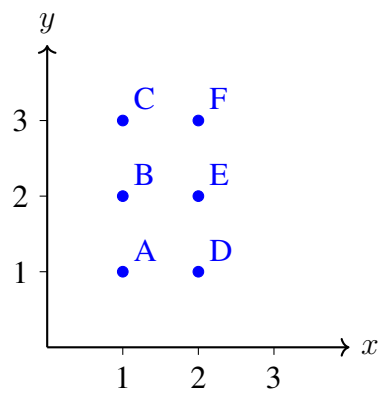
Naturalmente, è possibile scegliere assi inclinati a piacere o due unità di misura diverse. Nel nostro contesto, useremo un sistema di assi cartesiani *ortogonali* (con gli assi perpendicolari tra loro) e *monometrico* (con due unità uguali). Infine, si disegna una retta orizzontale, detta *asse delle ascisse* (solitamente etichettate con x), e una retta verticale dette *asse delle ordinate* (solitamente indicata con y).

Fissato il sistema di riferimento, a ogni punto del piano corrisponde una coppia di coordinate $\langle x, y \rangle$ e, viceversa, a ogni coppia di numeri corrisponde un punto $A(x, y)$.

Esempio 1.1. Dati i due insiemi numerici $X = \{1, 2\}$ e $Y = \{1, 2, 3\}$, il loro prodotto cartesiano $X \times Y$ è l'insieme di tutte le coppie ordinate $\langle a, b \rangle$ dove $a \in X$ e $b \in Y$.

Il prodotto cartesiano $X \times Y$ è: $X \times Y = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\}$
Queste coppie ordinate possono essere rappresentate in una tabella e come punti su un piano cartesiano. A ogni punto assegniamo un'etichetta alfanumerica per identificarlo

Punto	Coppia ordinata	Coordinate
A	$\langle 1, 1\rangle$	x=1, y=1
B	$\langle 1, 2\rangle$	x=1, y=2
C	$\langle 1, 3\rangle$	x=1, y=3
D	$\langle 2, 1\rangle$	x=2, y=1
E	$\langle 2, 2\rangle$	x=2, y=2
F	$\langle 2, 3\rangle$	x=2, y=3



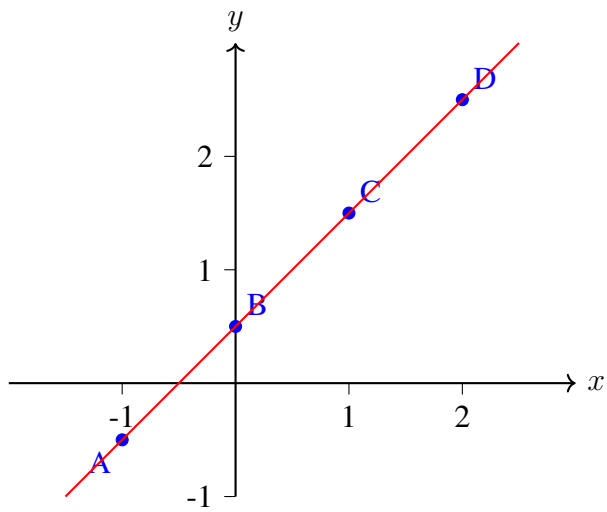
Definizione 1.15. [*Retta*] Avendo fissato un sistema di coordinate cartesiane, una retta è l'insieme di tutti i punti (x, y) che soddisfano un'equazione polinomiale di grado 1, ossia del tipo $ax + by + c = 0$

Esempio 1.2. I punti di coordinate (x, y) che soddisfano l'equazione $2x - 2y + 1 = 0$ formano una retta. In particolare i punti

$$A = (-1, -0.5), \quad B = (0, 0.5), \quad C = (1, 1.5), \quad D = (2, 2.5)$$

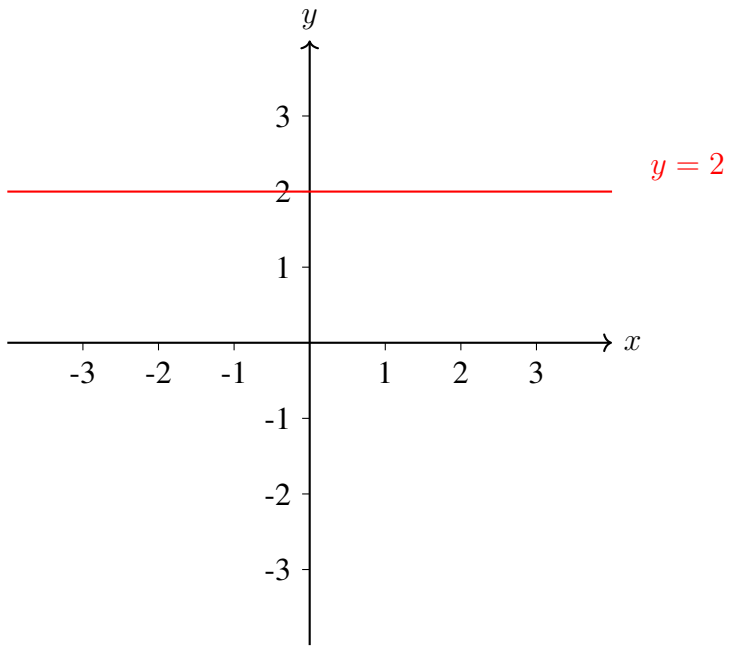
appartengono a questa retta perché le loro coordinate soddisfano l'equazione. Infatti, sostituendo le loro coordinate nella formula otteniamo come risultato 0

- $A : 2(-1) - 2(0.5) + 1 = 0$;
- $B : 2(0) - 2(0.5) + 1 = 0$;
- $C : 2(1) - 2(1.5) + 1 = 0$;
- $D : 2(2) - 2(2.5) + 1 = 0$.



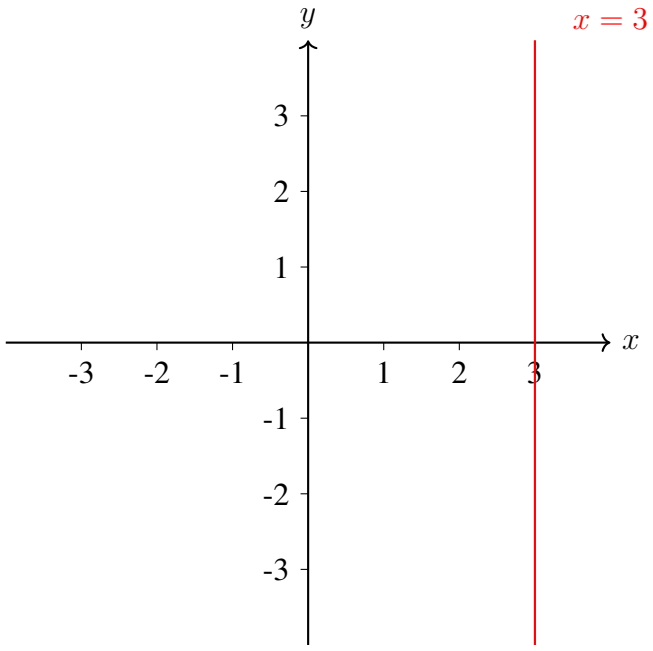
Definizione 1.16. [*Retta orizzontale*] Una retta orizzontale è una retta che si estende parallelamente all'asse delle ascisse x in un sistema di coordinate cartesiane. Tutte le rette orizzontali sono caratterizzate dal fatto che ogni punto su di esse ha la stessa ordinata y. La loro equazione generale è $y = k$, dove k è una costante.

Esempio 1.3. Data l'equazione $y = 2$ (cioè $y - 2 = 0$), con $a = 0, b = 1, c = 2$, tutti i punti (x, y) che soddisfano l'equazione stanno su una retta orizzontale. Più precisamente sono tutti e soli i punti $(x, 2)$ che hanno la seconda coordinata uguale a 2, e x uguale a qualsiasi numero reale.



Definizione 1.17. [*Retta verticale*] Una retta verticale è una retta che si estende parallelamente all'asse delle ordinate y in un sistema di coordinate cartesiane. Tutte le rette verticali sono caratterizzate dal fatto che ogni punto su di esse ha la stessa ascissa x. La loro equazione generale è $x = k$, dove k è una costante.

Esempio 1.4. Data l'equazione $x = 3$ (cioè $x - 3 = 0$), con $a = 0, b = 1, c = 3$, tutti i punti (x, y) che soddisfano l'equazione stanno su una retta verticale. Più precisamente sono tutti e soli i punti $(3, y)$ che hanno la prima coordinata uguale a 3, e y uguale a qualsiasi numero reale.



Infine, concludiamo questa piccola parentesi sui punti in un piano cartesiano osservando che se i punti (x, y) che soddisfano un'equazione di primo grado formano una retta, i punti (x, y) che soddisfano un qualsiasi polinomio di secondo grado $p(x, y) = 0$ formano invece una curva, le cui uniche forme possibili, che prendono il nome di *coniche*, sono

- *circonferenza*, per esempio $x^2 + y^2 - 1 = 0$;
- *ellisse*, per esempio $x^2 + 2y^2 - 1 = 0$;
- *parabola*, per esempio $y - x^2 = 0$;
- *iperbole*, per esempio $x^2 - y^2 - 1 = 0$;
- *nessun punto*, per esempio $x^2 + y^2 + 1 = 0$;
- *un punto*, per esempio $x^2 + y^2 = 0$;
- *una retta*, per esempio $(x + y)^2 = 0$;
- *due rette*, per esempio $(x + y)(x - y) = 0$.

Definizione 1.18. [*Relazione n-aria*] Sia X un insieme e $0 < n \in \mathbb{N}$, definiamo una relazione *n*-aria su X un qualsiasi insieme $R \subseteq X^n$.

Una relazione è quindi un insieme R che ha come elementi coppie ordinate $\langle x, y \rangle$. Se l'elemento $x \in X$ è associato all'elemento $y \in Y$ per mezzo della relazione binaria R, diremo che x *è in relazione con* y e scriveremo xRb o, con un piccolo abuso notazionale, $R(x, y)$. Se l'insieme Y coincide con con l'insieme X, parleremo in tal caso di *relazione nell'insieme* X. Inoltre, poiché $R \subseteq X^n$, chiameremo tale sottoinsieme il grafico della relazione su R e lo indicheremo con $grafR$. Ad esempio, dato l'insieme $A = \{1, 2, 3\}$ e la relazione R *essere minore di*..., il grafico di questa relazione è il seguente sottoinsieme di A^2:

$$grafR = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\}$$

Il concetto di relazione proposto è estensionale e ci consente di definire una relazione *n*-aria R su un insieme X esplicitamente, i.e. indicando quali elementi sono in relazione e in che ordine. Dal momento che una proprietà P attribuibile agli elementi di un insieme X è rappresentabile estensionalmente come il sottoinsieme di X costituito dai soli elementi che soddisfano (o esemplificano) P, chiameremo le relazioni *unarie* "proprietà".

Consideriamo adesso alcune proprietà interessanti che una relazione binaria R può avere

Definizione 1.19. [*Proprietà relazione binaria* R] Una relazione R su un insieme X è detta

- *riflessiva*, se $\forall x \in X,\ xRx$;
- *antiriflessiva*, se $\neg\exists x \in X$ tale che xRx (equivalentemente, $\forall x \in X, \neg(xRx)$);
- *simmetrica*, se $\forall x, y \in X,\ (xRy \to yRx)$;
- *asimmetrica*, se $\forall x, y \in X,\ (xRy \to \neg(yRx))$;
- *antisimmetrica*, se $\forall x, y \in X,\ (xRy \wedge yRx \to x = y)$;
- *transitiva*, se $\forall x, y, z \in X,\ (xRy \wedge yRz \to xRz)$;
- *euclidea*, se $\forall x, y, z \in X,\ (xRy \wedge xRz \to yRz)$;
- *seriale*, se $\forall x \in X,\ \exists y \in X$ tale che xRy;
- *connessa*, se $\forall x, y \in X,\ (xRy \vee yRx \vee x = y)$;
- *totale*, se $\forall x \in X,\ \exists y \in Y$ tale che xRy.

Inoltre, R è detta una relazione di

- *equivalenza*, se e solo se è riflessiva, simmetrica e transitiva su X;
- *preordine*, se e solo se è riflessiva e transitiva su X;
- *ordine parziale*, se e solo se è riflessiva, antisimmetrica e transitiva su X;
- *ordine totale*, se e solo se è riflessiva, antisimmetrica, connessa e transitiva su X.

Definizione 1.20. [*Chiusura di un insieme rispetto a una relazione*] Sia X un insieme e R una relazione, X è chiuso rispetto a R se e solo se contiene tutti i correlati dei suoi elementi

$$\forall x \in X, R(x, y) \to y \in X$$

1.3 Funzioni

Prima di introdurre una nozione fondamentale, quella di *funzione*, è necessario definire i concetti di *dominio* e *codominio*.

Definizione 1.21. [*Dominio e codominio di una relazione R*] Dati due insiemi, X detto *dominio* e Y detto *codominio*, con $a \in X$ e $b \in Y$, e una relazione $R \subseteq X \times Y$, definiamo il dominio e il codominio di R come segue

$$\text{dom}(R) = \{a \mid \exists b(\langle a, b\rangle \in R)\}$$

e

$$\text{cod}(R) = \{b \mid \exists a(\langle a, b\rangle \in R)\}$$

$\text{dom}(R)$ si dice il dominio di R, mentre $\text{cod}(R)$ si dice il codominio o l'*immagine* di R. Si dice campo di R l'insieme $F(R) = \text{dom}(R) \cup \text{cod}(R)$. Queste definizioni hanno senso, a priori, per ogni insieme R, tuttavia sono solitamente usate solo quando R è una relazione. Dunque, le relazioni definiscono delle *leggi di corrispondenza plurivoche* fra due insiemi (dominio e codominio). In questo caso si ha che $R \subseteq \text{dom}(R) \times \text{cod}(R)$. Si definisce infine $R^{-1} = \{\langle x, y\rangle \mid \langle y, x\rangle \in R\}$, cosicché $(R^{-1})^{-1} = R$, se R è una relazione.

Definizione 1.22. [*Relazione totale sul dominio e univoca sul codominio*] Una relazione R si dice *totale* sul $\text{dom}(R)$ e *univoca* sul $\text{cod}(R)$ se ha la seguente proprietà: per ogni $a \in X$, esiste un unico $b \in Y$ tale che $\langle a, b\rangle \in R$.

Definizione 1.23. [*Funzione*] Dati due insiemi X e Y, si definisce funzione da X in Y, una relazione f tra gli insiemi X e Y *totale* sul dominio e *univoca* sul codominio

$$\forall a \in \text{dom}(f)\ \exists! b \in \text{cod}(f)(\langle a, b\rangle \in f)$$

Scriveremo $f : X \longrightarrow Y$ per indicare che f è una funzione da X a Y e $a \mapsto b$ per indicare che $f(a) = b$. Data una funzione $f : X \longrightarrow Y$ indicheremo con $X = \text{dom}(f)$ il dominio o argomento di f e $\text{cod}(f) \subseteq Y$ il codominio o valore o immagine di f. Una funzione f, dunque, è una legge che associa a ogni elemento a di un insieme X uno ed uno solo elemento $f(a)$. Consistentemente, chiameremo l'insieme

$$f(X) = \{b \in Y \mid b = f(a),\ \text{per qualche } a \in X\}$$

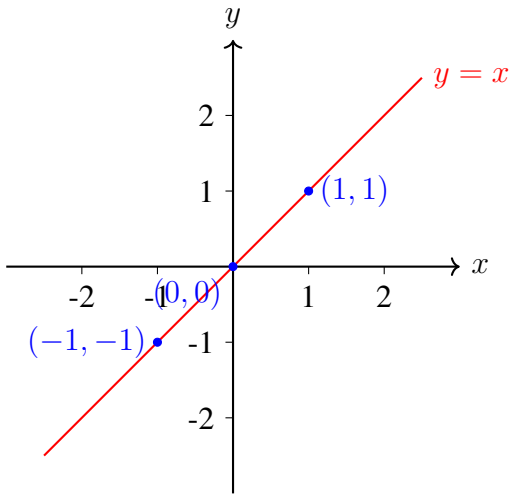
l'immagine di X secondo f. Quando il dominio e il codominio di una funzione sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, allora un elemento a del dominio e la sua immagine $f(a)$ del codominio, formano la coppia $\langle a, f(a)\rangle$, che possiamo interpretare come un punto $A(a, f(a))$ in un sistema di coordinate cartesiane.

Definizione 1.24. [*Funzione di una variabile reale*] Una funzione f è una corrispondenza tale che per ogni numero in un sottoinsieme $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$ fornisce un unico valore in $\mathbb{R}$. L'insieme $\mathcal{D}$ si chiama dominio della funzione, e $\mathbb{R}$ il codominio. L'insieme di tutti i possibili valori forniti da f si chiama immagine della funzione.

Solitamente una funzione è definita mediante un'espressione matematica. Convenzionalmente, se non sono presenti altre indicazioni, il dominio di $f(a)$ è il massimo insieme di definizione[7], ovvero l'insieme di tutte le a per cui la formula ha senso; mentre, l'immagine di una funzione $f(x)$ è l'insieme di tutte le immagini $f(a)$ al variare di a nel dominio $\mathcal{D}$.

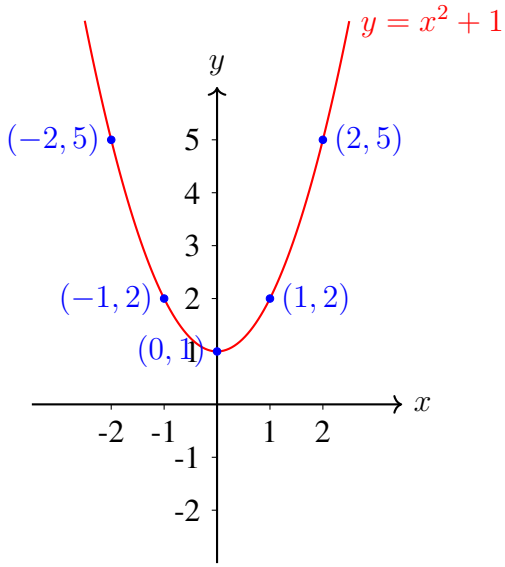
Definizione 1.25. [*Grafico di una funzione*] Il grafico di una funzione $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ è l'insieme dei punti (x, y) del piano che soddisfano l'equazione $y = f(x)$, vale a dire tutti i punti con coordinate $(a, f(a))$ al variare di $a \in \mathcal{D}$.

Esempio 1.5. Sia data la funzione $f(x) = x$. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ è possibile calcolare $f(a)$, quindi il dominio di $f(x)$ è $\mathbb{R}$. Il grafico di questa funzione è l'insieme di tutti i punti con coordinate (a, a) al variare di $a \in \mathbb{R}$ e, nello specifico, è una retta che passa per il punto $(0, 0)$.



Esempio 1.6. Sia data la funzione $f(x) = x^2 + 1$. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ è possibile calcolare $f(a)$, quindi il dominio di $f(x)$ è $\mathbb{R}$. Il grafico di questa funzione è l'insieme di tutti i punti con coordinate $(a, a^2 + 1)$ al variare di $a \in \mathbb{R}$ e, nello specifico, è una parabola

[7] Spesso anche detto "campo di definizione", o "campo di esistenza".



Definizione 1.26. [*Funzione iniettiva*] Una funzione $f : X \longrightarrow Y$ si dice iniettiva se f è anche univoca sul dominio

$$\forall a_1, a_2 \in X, a_1 \neq a_2 \rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

Intuitivamente, una funzione f è iniettiva se elementi distinti del dominio hanno immagini distinte nel codominio.

Definizione 1.27. [*Funzione suriettiva*] Una funzione $f : X \longrightarrow Y$ si dice suriettiva se f è anche totale sul codominio

$$\forall b \in Y, \exists a \in X \mid f(a) = b$$

Intuitivamente, una funzione f è suriettiva se ogni elemento del codominio è immagine di qualche elemento del dominio.

Definizione 1.28. [*Funzione biiettiva*] Una funzione $f : X \longrightarrow Y$ si dice biiettiva se è sia iniettiva che suriettiva:

$$\forall b \in Y, \exists! a \in X \mid f(a) = b$$

Intuitivamente, una funzione f si dice biiettiva se stabilisce una *corrispondenza biunivoca* tra gli elementi di X e quelli di Y.

Definizione 1.29. [*Funzione identità*] Sia X un insieme, allora la funzione $1_a : X \longrightarrow X$, tale che $1_X(a) = a, \forall a \in X$ è la funzione identità su X.

Definizione 1.30. [*Funzione composta*] Sia $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z$, allora la funzione composta di f e g è la funzione $g \circ f : X \longrightarrow Z$, tale che $g \circ f(a) = g(f(a))$, $\forall a \in X$.

Definizione 1.31. [*Funzione Inversa*] Sia $f : X \longrightarrow Y$, allora f è invertibile se e solo se esiste una funzione inversa $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ tale che $f^{-1} \circ f = 1_X$ e $f \circ f^{-1} = 1_Y$.

Sin dall'inizio del capitolo abbiamo più volte denotato oggetti distinti utilizzando pedici. Ad esempio, abbiamo utilizzato la notazione $X_1, X_2, \ldots etc$ per denotare uno o più insiemi. Grazie al concetto di funzione possiamo ora fornire una definizione rigorosa di *indicizzazione* (o *etichettatura*) di un insieme.

Definizione 1.32. [*Indicizzazione*] Un insieme indicizzato è una tripla (X, I, f), dove X, I sono insiemi non vuoti e $f : I \longrightarrow X$ è una funzione suriettiva. Dato un insieme indicizzato (X, I, f), se x è un simbolo utilizzato per denotare gli elementi di X, scriveremo x_i in luogo di $f(i)$, e indicheremo (X, I, f) con $\{x_i\}_{i \in I}$ o con $\{x_i \mid i \in I\}$.

Definizione 1.33. [*Indicizzazione di una famiglia di insiemi*] Per indicizzazione di una famiglia $\mathcal{F}$ si intende una funzione suriettiva $s : I \longrightarrow \mathcal{F}$

$$\forall X \in \mathcal{F}, \exists i \in I \mid s(i) = X$$

Ad esempio, data una famiglia $\{X_i\}$ con $i \in I, I = \mathbb{N}$, allora $\{X_i\}_{i \in I} = \{X_1, X_2, \ldots, X_\infty\}$. Nel caso di famiglie finite scriveremo: $\{X_i\}_{i=1}^n$ con $n \in \mathbb{N}$. Ad esempio, se $n = 3$ allora $\{X_i\}_{i=1}^3 = \{X_1, X_2, X_3\}$. *Parametri* e *parametrizzazione* sono sinonimi rispettivamente di indici e indicizzazione.

1.4 Teorema di Cantor e principio di induzione matematica

Il concetto di funzione ci permette, tra le altre cose, di parlare in modo più preciso della "grandezza" di un insieme. Diremo che X ha cardinalità $n \in \mathbb{N}$, $\#X = n$, se esiste una funzione biiettiva $f : X \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$ che assegni ad ogni $a \in X$ uno, e un solo elemento in $\{1, \ldots, n\}$.

Definizione 1.34. [*Insiemi equipotenti*] Due insiemi X e Y si dicono equipotenti se esiste una corrispondenza biunivoca tra i due insiemi, ossia se esiste una funzione $f : X \longrightarrow Y$ biunivoca.

Quando X e Y sono equipotenti si dice che tali due insiemi hanno la stessa cardinalità e si scrive

$$\#X = \#Y$$

Definizione 1.35. [*Insieme Potenza*] L'*insieme potenza* $\wp$, o *insieme delle parti* di un insieme X, è l'insieme che ha per elementi tutti i sottoinsiemi di X

$$\wp(X) := \{Y \mid Y \subseteq X\}$$

Definizione 1.36. Dati due insiemi X e Y, diciamo che $\#X \leq \#Y$ se esiste una funzione iniettiva $f : X \longrightarrow Y$.

Definizione 1.37. Dati due insiemi X e Y, diciamo che $\#X \geq \#Y$ se esiste una funzione suriettiva $f : X \longrightarrow Y$.

Se X è un insieme finito con $\#X = n$ elementi, allora l'insieme potenza di X contiene $\#X = 2^n$ elementi. Ad esempio, dato l'insieme $X = \{1, 2\}$, $\wp(X)$ sarà l'insieme $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. Come si può facilmente osservare, per ogni insieme X, sia $\emptyset$ che X sono elementi di $\wp(X)$ e $\wp(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

Un insieme X è *numerabile* quando esiste una biiezione tra X e $\mathbb{N}$. Se è scontato affermare che ogni insieme finito è numerabile, al contrario risulta molto più complicato chiedersi se ogni insieme infinito sia numerabile. Il prossimo teorema, dimostrato per la prima volta da Cantor nel 1891, risponde negativamente a questa domanda.

Teorema 1.1. [*Teorema di Cantor*] Per ogni insieme X, la cardinalità dell'insieme delle parti $\wp(X)$ è strettamente maggiore della cardinalità di X.

$$\forall X, \#X < \#\wp(X)$$

Il teorema di Cantor afferma che, per ogni insieme X, non esiste una funzione suriettiva $f : X \longrightarrow \wp(X)$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista una funzione suriettiva $f : X \longrightarrow \wp(X)$. Costruiamo l'insieme $Y = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$. Poiché Y è un sottoinsieme di X, per definizione $Y \in \wp(X)$. Dato che abbiamo supposto che la funzione f sia suriettiva, deve esistere un elemento $x_0 \in X$ tale che $f(x_0) = Y$. Ora, consideriamo due casi per l'appartenenza di x_0 all'insieme Y:

- *Caso 1*: $x_0 \in Y$. Per la definizione dell'insieme Y, se $x_0 \in Y$, allora deve valere la condizione $x_0 \notin f(x_0)$. Ma per la nostra ipotesi, $f(x_0) = Y$, quindi $x_0 \notin Y$. Questo è una contraddizione ($x_0 \in Y$ e $x_0 \notin Y$).
- *Caso 2*: $x_0 \notin Y$.Se $x_0 \notin Y$, per la definizione dell'insieme Y, la condizione $x_0 \notin f(x_0)$ non è soddisfatta. Ne consegue che $x_0 \in f(x_0)$. Ma poiché abbiamo che $f(x_0) = Y$, allora $x_0 \in Y$. Anche questo è una contraddizione ($x_0 \notin Y$ e $x_0 \in Y$).

In entrambi i casi arriviamo a una contraddizione logica. La nostra ipotesi iniziale (che esista una funzione suriettiva f) deve essere falsa. Ne segue che, una tale funzione non può esistere, e si conclude che non è possibile associare a ogni elemento di X un sottoinsieme unico di X in modo suriettivo. Pertanto, la cardinalità di $\wp(X)$ è strettamente maggiore della cardinalità di X.

□

Il Teorema di Cantor ha una conseguenza profonda e controintuitiva: non tutti gli insiemi infiniti hanno la stessa cardinalità. A partire da Aristotele, si era distinto l'infinito *potenziale* da quello *attuale*. Con l'infinito potenziale si indica la *possibilità* di accrescere indefinitamente l'estensione di una grandezza o il numero di elementi di una collezione; mentre, con l'infinito attuale si indica una *totalità effettivamente data* di infiniti elementi. La prescrizione aristotelica di bandire dal discorso rigoroso qualsiasi forma di infinito attuale fu accolta quasi senza eccezioni dalla scienza moderna. Basti pensare agli sforzi all'interno della matematica per eliminare nell'analisi le vaghezze dei concetti di infinitesimo e infinito, fondando l'analisi sul concetto di *limite* (che implica la considerazione di infiniti potenziali) e, più in generale, la riconduzione dell'analisi e di tutti i sistemi numerici ai numeri naturali, l'aritmetica, un ramo della matematica in cui si opera praticamente sempre sul finito. Al contrario, la rivoluzione cantoriana, ammette esplicitamente l'esistenza di infiniti attuali, dapprima di punti, poi di enti qualsiasi. Cantor, infatti, attraverso il suo teorema dimostrò che *esistono infiniti di diverse dimensioni*. L'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ ha la cardinalità più piccola tra gli infiniti. L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ ha una cardinalità strettamente maggiore rispetto a quella dei numeri naturali

$$\#\mathbb{N} < \#\mathbb{R}$$

Questo significa che è impossibile creare una lista (anche infinita) di tutti i numeri reali. Se provassimo a farlo, il "metodo diagonale" di Cantor ci permetterebbe sempre di costruire un numero reale che non è presente nella nostra lista, dimostrando così che la lista è incompleta.

Per misurare la cardinalità degli insiemi infiniti, Cantor introdusse i *numeri cardinali transfiniti*. Il più piccolo di questi è $\aleph_0$ (aleph zero), che rappresenta la cardinalità dell'insieme dei numeri naturali. Il teorema di Cantor ha dimostrato che l'insieme potenza dei numeri naturali $\wp(\mathbb{N})$, ha una cardinalità strettamente maggiore di $\aleph_0$.

Corollario 1.1. Non esiste una funzione biiettiva $f : \mathbb{N} \longrightarrow \wp(\mathbb{N})$

Questo nuovo e più grande infinito viene chiamato $\aleph_1$. Il processo può essere iterato per creare una gerarchia infinita di infiniti.

A partire da $\aleph_0$ è possibile costruire una sequenza di numeri cardinali transfiniti in continua crescita, nota come *serie degli aleph*

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \dots$$

Questa serie mostra che non esiste un "infinito più grande" in assoluto, ma una scala infinita di infiniti, ciascuno più grande del precedente. Fu proprio la costruzione da parte di Cantor di una effettiva *aritmetica del transfinito*, la prova più convincente della legittimità di introdurre l'infinito attuale. Secondo Arthur Schoenflies (1853-1928), la teoria degli insiemi è diventata una disciplina matematica esattamente quando Cantor ha presentato il numerabile (ossia la cardinalità di $\mathbb{N}$) come un ben definito concetto

matematico, accanto alla classificazione degli insiemi infiniti secondo la cardinalità, e con la dimostrazione che i numeri algebrici sono numerabili, mentre il continuo non lo è.

Concludiamo il capitolo focalizzandoci su una delle tecniche dimostrative più importanti utilizzate in questo volume: l'*induzione matematica*[8]. Intuitivamente, l'induzione matematica è una strategia dimostrativa che ci permette di provare che una proprietà P è soddisfatta da tutti i numeri naturali, ovvero che l'insieme dei numeri naturali che soddisfano P coincide con $\mathbb{N}$.

Principio 1.4. [*Principio di induzione matematica*] Data una proprietà P e una sequenza di oggetti $x_0, \ldots, x_n$ ordinata secondo l'ordine degli indici, i.e. $x_i \leq x_j$ se e solo se $i \leq j$, con $i, j \in \mathbb{N}$

Base. x_0 soddisfa P;
Passo induttivo. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, se $P(x_n)$ allora $P(x_{n+1})$;
Conclusione. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $P(x_n)$ è vero.

Chiameremo l'antecedente della premessa *ipotesi induttiva*. L'induzione si usa di solito in un contesto aritmetico, o di matematica discreta, o più raramente in geometria. In questi contesti, l'induzione da luogo a uno schema: quando al posto di un qualsiasi insieme $Y \subseteq \mathbb{N}$ si sostituisca una formula qualsiasi del linguaggio $\varphi \equiv P(x)$ che definisce un insieme $Y = \{x \in \mathbb{N} \mid P(x)\}$, il principio di induzione diventa

$$(P(0) \wedge \forall x \rightarrow P(s(x))) \rightarrow \forall x P(x)$$

dove s indica il successore: $s(x) = x + 1$. Lo scopo dell'esempio è quello di illustrare come dal principio di induzione discenda la giustificazione di una forma di dimostrazione in due passi. Questo è il vero modo in cui l'induzione si manifesta e viene utilizzata. Come scrive Gabriele Lolli:

> Un'immagine comoda per rappresentarsi la situazione che si realizza con l'induzione è quella di una successione di pezzi di domino messi in piedi, in equilibrio precario, distanti tra loro meno della loro altezza. Così se un pezzo cade verso destra fa cadere verso destra quello adiacente. Se cade il primo, fa cadere il secondo, che fa cadere il terzo, e così via, *tutti* cadono. (Lolli 2008, p. 88)

[8] L'espressione "induzione matematica" fu introdotta nell'Ottocento da Augustus De Morgan (1806-1871).

ESERCIZI CAP. 1.

Esercizio 1.1. Definire per enumerazione i seguenti insiemi.

1. $\{x \in \mathbb{N} \mid 6 \leq x \leq 10\}$
2. $\{x \in \mathbb{N} \mid x + x = 4\}$
3. $\{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x \leq 3\}$
4. $\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{10}{x}\}$
5. $\{x \in \mathbb{N} \mid x$ è pari e $x < 10\}$
6. $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 9\}$
7. $\{x \in \mathbb{N} \mid x$ è un numero primo e $x < 15\}$
8. $\{x \in \mathbb{N} \mid x$ è un multiplo di 5 e $x \leq 25\}$
9. $\{x \in \mathbb{N} \mid x$ è un multiplo di 5 e $0 < x \leq 25\}$
10. $\{x \in \mathbb{Z} \mid -1 < x < 1\}$
11. $\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 4\}$
12. $\{x \in \mathbb{N} \mid x$ è un quadrato perfetto e $x \leq 30\}$
13. $\{x \in \mathbb{N} \mid x$ è divisibile per 3 e $x < 12\}$
14. $\{x \in \mathbb{N} \mid x = k^2 + 1$ per $k \in \{1, 2, 3\}\}$
15. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 2\}$
16. $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | x + y = 3\}$
17. $\{x \in \mathbb{Z} \mid x$ soddisfa $x + 2 = 1$ o $x - 1 = 3\}$
18. $\{x \in \mathbb{N} \mid x$ è il risultato del codice R $2 : 5\}$
19. $\{x \in \mathbb{N} \mid x$ è il risultato del codice R $seq(from = 1, to = 10, by = 3)\}$
20. $\{x \in \mathbb{Z} \mid x$ è un multiplo di 7 e $-10 < x < 10\}$

Esercizio 1.2. Definire per comprensione i seguenti insiemi.

1. $\{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$
2. $\{3, 4, 5\}$
3. $\{-1, 0, 1\}$
4. $\{3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}$
5. $\{1, 4, 9, 16, 25\}$
6. $\{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$
7. $\{7, 8, 9, 10\}$
8. $\{0, 5, 10, 15, 20\}$
9. $\{-2, -1\}$
10. $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
11. $\{1, 10, 100, 1000\}$
12. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$
13. $\{2, 3, 5, 7\}$
14. $\{1, 2, 3, 4\}$
15. $\{1\}$
16. $\emptyset$

17. $\{(1,1),(1,2),(2,1)\}$
18. $\{..., -3, -2, -1\}$
19. $\{10, 20, 30, 40, \ldots\}$
20. $\{0\}$

Esercizio 1.3. Dati gli insiemi $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} | 4 \leq x < 10 \wedge x$ è pari$\}$ definire.

1. $A \cap B$, $A \cap \emptyset$ e $A \cap A$
2. $A \cup B$, $A \cup \emptyset$ e $B \cup B$
3. $A - B$, $B - A$ e $A - A$
4. $A \times B$ e B^2

Esercizio 1.4. Dati gli insiemi $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq 1\}$ e $D = \{0, 1, 2, 3\}$, definire.

1. $C \cap D$, $C \cap \mathbb{N}$ e $D \cap D$
2. $C \cup D$, $D \cup \mathbb{Z}$ e $C \cup C$
3. $C - D$, $D - C$ e $\mathbb{Z} - C$
4. $|D|$ e $C \times D$

Esercizio 1.5. Dati gli insiemi $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ è un divisore di $6\}$ e $F = \{1, 3, 5\}$, definire.

1. $E \cap F$, $E \cap \{6\}$ e $F \cap \mathbb{R}$
2. $E \cup F$, $E \cup \emptyset$ e $F \cup F$
3. $E - F$, $F - E$ e $E - E$
4. $E \times F$ e $|E \times F|$

Esercizio 1.6. Scrivere l'insieme potenza dei seguenti insiemi.

1. $\{1, 2, 3\}$
2. $\{x \in \mathbb{N} \mid 54 \leq x < 56\}$
3. $\emptyset$
4. $\wp(X)$, dove $X = \{a, b\}$

Esercizio 1.7. ♠ Scrivere l'insieme potenza dei seguenti insiemi.

1. $\{a, b\}$
2. $A \cap B$, dove $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ è pari e $x < 5\}$
3. $\{\emptyset\}$
4. $Y \cup Z$, dove $Y = \{m\}$ e $Z = \{n\}$

Esercizio 1.8. Stabilire se le seguenti funzioni sono iniettive. Motivare brevemente la risposta.

1. $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, definita da $f(x) = 2x$.
2. $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definita da $g(x) = x^2$.

3. $h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, definita da $h(x) = x^2$.
4. $k : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, definita da $k(x) = x + 3$.
5. $m : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, definita da $m(x) = |x|$, dove $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

Esercizio 1.9. Stabilire se le seguenti funzioni sono suriettive. Motivare la risposta confrontando l'insieme delle immagini con il codominio Y.

1. $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, definita da $f(x) = 2x$.
2. $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, definita da $g(x) = x^2$. ($\mathbb{R}^+ \cup \{0\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$)
3. $h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$, definita da $h(x) = x$.
4. $k : \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{a, b\}$, definita da $k(1) = a, k(2) = b, k(3) = a$.
5. $m : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definita da $m(x) = x + 1$.

Esercizio 1.10. Stabilire se le seguenti funzioni sono biiettive.

1. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definita da $f(x) = 3x$.
2. $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, definita da $g(x) = x^3$.
3. $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definita da $h(x) = \sin(x)$.
4. $k : \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{a, b, c\}$, definita da $k(1) = a, k(2) = c, k(3) = b$.
5. $m : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, definita da $m(x) = x + 1$.

Esercizio 1.11. Indicare qual è la funzione identità per ciascuno dei seguenti domini e stabilire se la funzione data la rappresenta.

1. Dominio $X = \mathbb{R}$, funzione data $f(x) = x$.
2. Dominio $X = \mathbb{Z}$, funzione data $g(x) = |x|$.
3. Dominio $X = \{1, 2, 3\}$, funzione data $h(x) = 1_X(x)$.
4. Dominio $X = \{0\}$, funzione data $k(x) = 0$.
5. Dominio $X = \mathbb{N}$, funzione data $m(x) = x^2$.

Esercizio 1.12. ♠ Date le funzioni f e g, calcolare la funzione composta $g \circ f$ e valutarla nel punto specificato.

1. $f(x) = x + 1$, $g(y) = y^2$. Calcolare $g \circ f(3)$.
2. $f(x) = 2x$, $g(y) = 5y - 1$. Calcolare l'espressione di $g \circ f(x)$.
3. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2}$, $g(y) = y^3$. Calcolare $g \circ f(-2)$.
4. $f(x) = 0$, $g(y) = y + 10$. Calcolare $g \circ f(5)$.
5. $f(x) = x$, $g(y) = \frac{1}{y}$. Calcolare $g \circ f(2)$.

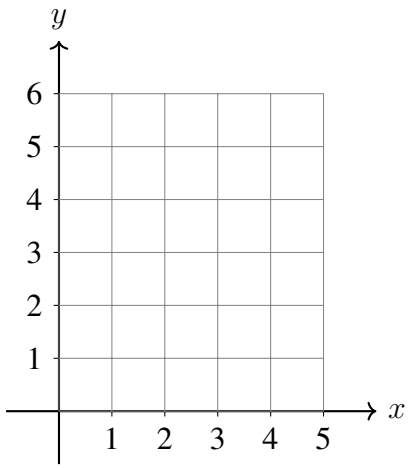
Esercizio 1.13. ♠ Stabilire se le seguenti funzioni sono invertibili e, in caso affermativo, trovare l'espressione dell'inversa $f^{-1}(y)$.

1. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definita da $f(x) = x - 5$.
2. $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definita da $g(x) = x^2$.
3. $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definita da $h(x) = 4$.

4. $k : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$, definita da $k(x) = \frac{1}{x}$. ($\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$)
5. $m : \{a, b\} \longrightarrow \{1, 2\}$, definita da $m(a) = 2, m(b) = 1$.

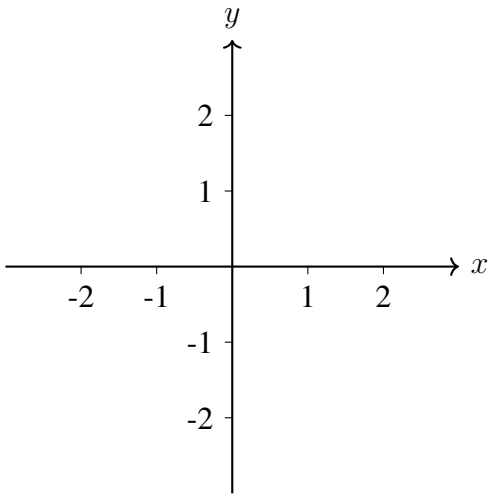
Esercizio 1.14. Data la funzione $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definita da $f(x) = 2x$:

1. Determinare il dominio e il codominio specificati.
2. Calcolare il valore della funzione per $x = 0, x = 2,$ e $x = 5$.
3. Descrivere e disegnare (o rappresentare) il grafico della funzione.



Esercizio 1.15. ♠ Data la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x - 1$:

1. Determinare il dominio e il codominio specificati.
2. Calcolare il valore della funzione per $x = 0, x = 1,$ e $x = -1$.
3. Descrivere e disegnare il grafico della funzione.



Esercizio 1.16. ♠ Sia dato l'insieme dominio $X = \{1, 3, 5, 7\}$ e sia definita una funzione $f : X \longrightarrow Y$ tale che $f(x) = x + 1$.

1. Definire per enumerazione l'insieme codominio Y, dato che $Y = f(X)$.
2. Calcolare $X \cup Y$, $X \cap Y$, $X - Y$ e $Y - X$.
3. Definire il prodotto cartesiano $X \times Y$ e rappresentarne le coppie ordinate in una tabella e come punti su un piano cartesiano come nell'Esempio 1.1.

SOLUZIONE ESERCIZI CAP. 1.

Soluzione Esercizio 1.1.

1. $\{6, 7, 8, 9, 10\}$
2. $\{2\}$
3. $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
4. $\{1, 2, 5, 10\}$
5. $\{0, 2, 4, 6, 8\}$
6. $\{-3, 3\}$
7. $\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$
8. $\{0, 5, 10, 15, 20, 25\}$
9. $\{5, 10, 15, 20, 25\}$
10. $\{0\}$
11. $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
12. $\{1, 4, 9, 16, 25\}$ (Poiché $1^2 = 1, 2^2 = 4, 3^2 = 9, 4^2 = 16, 5^2 = 25$. $6^2 = 36$ è troppo grande)
13. $\{0, 3, 6, 9\}$
14. $\{2, 5, 10\}$ (Se $k = 1$, $1^2 + 1 = 2$. Se $k = 2$, $2^2 + 1 = 5$. Se $k = 3$, $3^2 + 1 = 10$)
15. $\emptyset$ (L'insieme è definito sui reali $\mathbb{R}$, ma $x^2 = 2$ ha soluzioni $x = \pm\sqrt{2}$, che non possono essere elencate)
16. $\{(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0)\}$ (Poiché $x, y \in \mathbb{N}$, e si assume $0 \in \mathbb{N}$)
17. $\{-1, 4\}$ (La prima equazione: $x + 2 = 1 \to x = -1$. La seconda equazione: $x - 1 = 3 \to x = 4$. Entrambe le soluzioni sono intere $\mathbb{Z}$)
18. $\{2, 3, 4, 5\}$
19. $\{1, 4, 7, 10\}$
20. $\{-7, 0, 7\}$

Soluzioni Esercizio 1.2.

1. $\{x \in \mathbb{N} \mid x$ è pari e $x \geq 2\}$ oppure $\{2k \mid k \in \mathbb{N}, k \geq 1\}$
2. $\{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leq x \leq 5\}$
3. $\{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x \leq 1\}$
4. $\{x \in \mathbb{N} \mid x$ è multiplo di 3 e $x \geq 3\}$ oppure $\{3k \mid k \in \mathbb{N}, k \geq 1\}$
5. $\{x \in \mathbb{N} \mid x = k^2$ per $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$
6. $\{x \in \mathbb{N} \mid x$ è dispari$\}$ oppure $\{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$
7. $\{x \in \mathbb{N} \mid 7 \leq x \leq 10\}$
8. $\{x \in \mathbb{N} \mid x$ è multiplo di 5 e $x \leq 20\}$
9. $\{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x < 0\}$
10. $\{x \in \mathbb{N} \mid x$ divide $12\}$
11. $\{x \in \mathbb{N} \mid x = 10^k$ per $k \in \{0, 1, 2, 3\}\}$
12. $\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 2\}$
13. $\{x \in \mathbb{N} \mid x$ è un numero primo e $x < 10\}$
14. $\{x \in \mathbb{N} \mid x < 5$ e $x \geq 1\}$

15. $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 1\}$
16. $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = -4\}$
17. $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + y \leq 3$ e $x \geq 1, y \geq 1\}$
18. $\{x \in \mathbb{Z} \mid x < 0\}$
19. $\{x \in \mathbb{N} \mid x$ è multiplo di 10 e $x \geq 10\}$
20. $\{x \in \mathbb{N} \mid x < 1\}$

Soluzione Esercizio 1.3.
Dati gli insiemi $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} | 4 \leq x < 10 \wedge x$ è pari$\}$, si ha per enumerazione $B = \{4, 6, 8\}$.

1. $A \cap B = \{4, 6\}$
   $A \cap \emptyset = \emptyset$
   $A \cap A = A = \{2, 4, 6\}$
2. $A \cup B = \{2, 4, 6, 8\}$
   $A \cup \emptyset = A = \{2, 4, 6\}$
   $B \cup B = B = \{4, 6, 8\}$
3. $A - B = \{2\}$ (Elementi in A ma non in B)
   $B - A = \{8\}$ (Elementi in B ma non in A)
   $A - A = \emptyset$
4. $A \times B = \{(2, 4), (2, 6), (2, 8),$
   $(4, 4), (4, 6), (4, 8),$
   $(6, 4), (6, 6), (6, 8)\}$
   $B^2 = \{(4, 4), (4, 6), (4, 8),$
   $(6, 4), (6, 6), (6, 8),$
   $(8, 4), (8, 6), (8, 8)\}$
   $\#(A \times B) = 9$

Soluzione Esercizio 1.4.

1. $C \cap D = \{0, 1\}$
   $C \cap \mathbb{N} = \{-2, -1, 0, 1\} \cap \{0, 1, 2, 3, \ldots\} = \{0, 1\}$
   $D \cap D = D = \{0, 1, 2, 3\}$
2. $C \cup D = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
   $D \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$
   $C \cup C = C = \{-2, -1, 0, 1\}$
3. $C - D = \{-2, -1\}$ (Elementi in C ma non in D)
   $D - C = \{2, 3\}$ (Elementi in D ma non in C)
   $\mathbb{Z} - C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < -2$ o $x > 1\}$
4. $|D| = 4$
   $C \times D = \{(-2, 0), (-2, 1), (-2, 2), (-2, 3),$
   $(-1, 0), (-1, 1), (-1, 2), (-1, 3),$
   $(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3),$
   $(1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$

Soluzione Esercizio 1.5.

1. $E \cap F = \{1, 3\}$
   $E \cap \{6\} = \{6\}$
   $F \cap \mathbb{R} = F = \{1, 3, 5\}$
2. $E \cup F = \{1, 2, 3, 5, 6\}$
   $E \cup \emptyset = E = \{1, 2, 3, 6\}$
   $F \cup F = F = \{1, 3, 5\}$
3. $E - F = \{2, 6\}$ (Elementi in E ma non in F)
   $F - E = \{5\}$ (Elementi in F ma non in E)
   $E - E = \emptyset$
4. $E \times F = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5),$
   $(2, 1), (2, 3), (2, 5),$
   $(3, 1), (3, 3), (3, 5),$
   $(6, 1), (6, 3), (6, 5)\}$
   $|E \times F| = |E| \cdot |F| = 4 \cdot 3 = 12$

Soluzione Esercizio 1.6.

1. $S = \{1, 2, 3\}$. $\#S = 3$, quindi $\#\wp(S) = 2^3 = 8$.

$$\wp(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

2. $S = \{x \in \mathbb{N} \mid 54 \leq x < 56\} = \{54, 55\}$. $\#S = 2$, quindi $\#\wp(S) = 2^2 = 4$.

$$\wp(\{54, 55\}) = \{\emptyset, \{54\}, \{55\}, \{54, 55\}\}$$

3. $S = \emptyset$. $\#S = 0$, quindi $\#\wp(S) = 2^0 = 1$.

$$\wp(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

4. $X = \{a, b\}$. $\wp(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. L'insieme potenza richiesto è $S = \wp(X)$. $\#S = 4$, quindi $\#\wp(S) = 2^4 = 16$.

$$\wp(\wp(X)) = \wp(\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\})$$

Soluzione Esercizio 1.7.

1. $S = \{a, b\}$. $\#S = 2$, quindi $\#\wp(S) = 2^2 = 4$.

$$\wp(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

2. L'insieme base è $S = A \cap B = \{1, 2, 3\} \cap \{2, 4\} = \{2\}$. $\#S = 1$, quindi $\#\wp(S) = 2^1 = 2$.

$$\wp(A \cap B) = \wp(\{2\}) = \{\emptyset, \{2\}\}$$

3. $S = \{\emptyset\}$. Questo è un insieme che contiene un solo elemento. $\#S = 1$, quindi $\#\wp(S) = 2^1 = 2$.
$$\wp(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$
4. L'insieme base è $S = Y \cup Z = \{m\} \cup \{n\} = \{m, n\}$. $\#S = 2$, quindi $\#\wp(S) = 2^2 = 4$.
$$\wp(Y \cup Z) = \wp(\{m, n\}) = \{\emptyset, \{m\}, \{n\}, \{m, n\}\}$$

Soluzione Esercizio 1.8.

1. $f(x) = 2x$. È iniettiva. Motivazione: $2a_1 = 2a_2 \quad \text{allora} \quad a_1 = a_2$.
2. $g(x) = x^2$. Non è iniettiva. Motivazione: $g(-2) = g(2) = 4$, ma $-2 \neq 2$.
3. $h(x) = x^2$. È iniettiva. Motivazione: $a_1^2 = a_2^2$ con $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$ implica $a_1 = a_2$.
4. $k(x) = x + 3$. È iniettiva. Motivazione: $a_1 + 3 = a_2 + 3 \quad \text{allora} \quad a_1 = a_2$.
5. $m(x) = |x|$. È iniettiva. Motivazione: Sul dominio $\mathbb{R}^+$, $|x| = x$, e la funzione identità è iniettiva.

Soluzione Esercizio 1.9.

1. $f(x) = 2x$. Non è suriettiva. Motivazione: L'immagine è l'insieme dei numeri pari, un sottoinsieme proprio di $\mathbb{Z}$. 3 non è raggiunto.
2. $g(x) = x^2$. È suriettiva. Motivazione: Per ogni b nel codominio (≥ 0), $\exists a = \sqrt{b}$ tale che $g(a) = b$.
3. $h(x) = x$. Non è suriettiva. Motivazione: L'immagine è $\mathbb{N}$. Gli interi negativi nel codominio $\mathbb{Z}$ non sono raggiunti.
4. k. È suriettiva. Motivazione: Il codominio $\{a, b\}$ è interamente raggiunto.
5. $m(x) = x + 1$. È suriettiva. Motivazione: Per ogni $b \in \mathbb{R}$, $\exists a = b - 1$ tale che $m(a) = b$.

Soluzione Esercizio 1.10.

1. $f(x) = 3x$. È biiettiva. (È iniettiva e suriettiva).
2. $g(x) = x^3$. Non è biiettiva. (Non è suriettiva, es. $2 \in \mathbb{Z}$ non è immagine).
3. $h(x) = \sin(x)$. Non è biiettiva. (Non è iniettiva né suriettiva).
4. k. È biiettiva. (Stabilisce una corrispondenza biunivoca).
5. $m(x) = x + 1$. Non è biiettiva. (È iniettiva ma non suriettiva, 0 nel codominio non è raggiunto).

Soluzione Esercizio 1.11.

1. $1_{\mathbb{R}}(x) = x$. La funzione la rappresenta.
2. $1_{\mathbb{Z}}(x) = x$. La funzione non la rappresenta. (es. $|-2| \neq -2$).
3. $1_X(x) = x$. La funzione la rappresenta.
4. $1_{\{0\}}(x) = x$. La funzione la rappresenta. (Solo $k(0) = 0$).
5. $1_{\mathbb{N}}(x) = x$. La funzione non la rappresenta. (es. $m(2) = 4 \neq 2$).

Soluzione Esercizio 1.12.

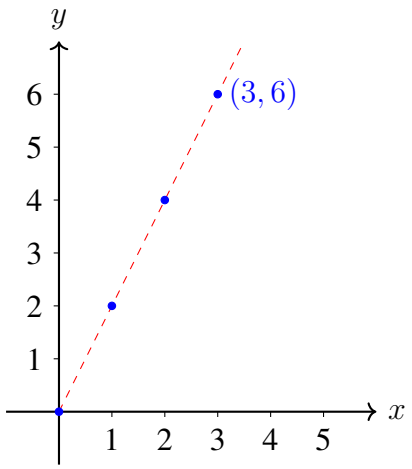
1. $g \circ f(3) = g(3+1) = g(4) = 16$.
2. $g \circ f(x) = g(2x) = 5(2x) - 1 = 10x - 1$.
3. $g \circ f(-2) = g(\sqrt{(-2)^2}) = g(2) = 2^3 = 8$.
4. $g \circ f(5) = g(0) = 0 + 10 = 10$.
5. $g \circ f(2) = g(2) = 1/2$.

Soluzione Esercizio 1.13.

1. $f(x) = x - 5$. È invertibile. $f^{-1}(y) = y + 5$.
2. $g(x) = x^2$. Non è invertibile. (Non è iniettiva su $\mathbb{R}$).
3. $h(x) = 4$. Non è invertibile. (Non è iniettiva né suriettiva).
4. $k(x) = \frac{1}{x}$. È invertibile. $k^{-1}(y) = \frac{1}{y}$.
5. m. È invertibile. $m^{-1}(1) = b$ e $m^{-1}(2) = a$.

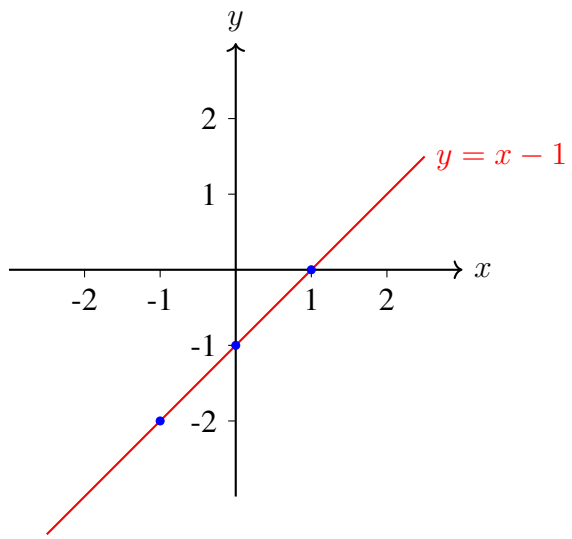
Esercizio 1.14. Data la funzione $f(x) = 2x$:

1. Il dominio specificato è $X = \mathbb{N}$ e il codominio è $Y = \mathbb{N}$.
2. Valori della funzione: $f(0) = 0$, $f(2) = 4$, $f(5) = 10$.
3. Descrizione e grafico: Il grafico è l'insieme di punti $(a, 2a)$ dove $a \in \mathbb{N}$. Si tratta di un insieme discreto di punti.



Esercizio 1.15. Data la funzione $f(x) = x - 1$:

1. Il dominio specificato è $X = \mathbb{R}$ e il codominio è $Y = \mathbb{R}$.
2. Valori della funzione: $f(0) = -1$, $f(1) = 0$, $f(-1) = -2$.
3. Descrizione e grafico: Il grafico è l'insieme dei punti $(a, a-1)$ dove $a \in \mathbb{R}$. Nello specifico, è una **retta** con pendenza $m = 1$ e intercetta y pari a -1.



Soluzione Esercizio 1.16.
Sia dato l'insieme dominio $X = \{1, 3, 5, 7\}$ e la funzione $f(x) = x + 1$.

1. Definizione del Codominio Y: L'insieme codominio Y è l'insieme delle immagini degli elementi di X tramite f:

   $$Y = f(X) = \{f(1), f(3), f(5), f(7)\} = \{1+1, 3+1, 5+1, 7+1\} = \{2, 4, 6, 8\}$$

2. Operazioni tra insiemi:
   Poiché X è composto da soli numeri dispari e Y da soli numeri pari, i due insiemi sono disgiunti.
   - $X \cup Y = \{1, 3, 5, 7\} \cup \{2, 4, 6, 8\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
   - $X \cap Y = \{1, 3, 5, 7\} \cap \{2, 4, 6, 8\} = \emptyset$
   - $X - Y = \{1, 3, 5, 7\} - \{2, 4, 6, 8\} = \{1, 3, 5, 7\} = X$
   - $Y - X = \{2, 4, 6, 8\} - \{1, 3, 5, 7\} = \{2, 4, 6, 8\} = Y$

3. Prodotto Cartesiano $X \times Y$:
   Il prodotto cartesiano $X \times Y$ è l'insieme di tutte le coppie ordinate $\langle a, b\rangle$ dove $a \in X$ e $b \in Y$.

   $$\#(X \times Y) = \#X \cdot \#Y = 4 \cdot 4 = 16$$

   $X \times Y = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 1, 6\rangle, \langle 1, 8\rangle,$

   $$\langle 3, 2\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 3, 6\rangle, \langle 3, 8\rangle,$$

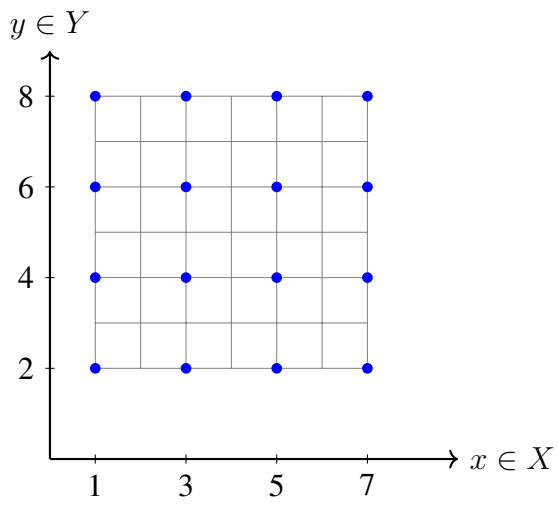
   $$\langle 5, 2\rangle, \langle 5, 4\rangle, \langle 5, 6\rangle, \langle 5, 8\rangle,$$

   $$\langle 7, 2\rangle, \langle 7, 4\rangle, \langle 7, 6\rangle, \langle 7, 8\rangle\}$$

Rappresentazione Tabellare di $X \times Y$:

X × Y	**2**	**4**	**6**	**8**
1	$\langle 1, 2\rangle$	$\langle 1, 4\rangle$	$\langle 1, 6\rangle$	$\langle 1, 8\rangle$
3	$\langle 3, 2\rangle$	$\langle 3, 4\rangle$	$\langle 3, 6\rangle$	$\langle 3, 8\rangle$
5	$\langle 5, 2\rangle$	$\langle 5, 4\rangle$	$\langle 5, 6\rangle$	$\langle 5, 8\rangle$
7	$\langle 7, 2\rangle$	$\langle 7, 4\rangle$	$\langle 7, 6\rangle$	$\langle 7, 8\rangle$

Rappresentazione Grafica di $X \times Y$:



2

Logica proposizionale

Il CAP. 2 è articolato in tre parti. Nelle prime due, presenteremo la sintassi e la semantica della logica proposizionale, insieme al metodo delle tavole di verità. Nella terza, introdurremo il metodo dei tableaux analitici e gli insiemi di Hintikka, per poi dimostrare due importanti risultati metateorici: il teorema di correttezza e quello di completezza per il metodo dei tableaux.

2.1 La formalità della logica

Una prima definizione di logica può essere la seguente

Definizione 2.1. [*Logica*] La logica è lo studio delle condizioni di verità delle asserzioni e delle condizioni di validità delle argomentazioni formulate in un linguaggio.

Per condizioni di verità della asserzioni si intende che la logica non tratta qualsiasi tipo di discorso ma solo quel discorso dotato di valore di verità: il *discorso assertivo*. Il contenuto di un discorso assertivo sono le *proposizioni*, particolari costrutti linguistici dotati di *valore di verità*. Un insieme finito di proposizioni in cui possiamo distinguere un insieme di proposizioni iniziali, dette *premesse*, e almeno una proposizione finale, detta *conclusione*, prende il nome di *argomentazione*. In questo senso, un'argomentazione è un insieme di proposizioni che stanno tra loro in certe *relazioni inferenziali*, e un ragionamento è articolato in uno o più argomentazioni o argomenti. Un'argomentazione *valida* è un'argomentazione basata su un'inferenza valida, ossia ciò che direttamente determina il *seguire necessariamente* delle proposizioni da certe altre. Parafrasando il *dictum* aristotelico che apre il libro primo dei *Topici*:

> Sono logiche quelle proprietà in base alle quali nei ragionamenti, date certe proposizioni, altre seguono necessariamente in virtù di quelle.

Per tale motivo, la logica ha storicamente spiegato la validità di un'argomentazione nei termini di una proprietà *modale*

> L'enunciato C è *conseguenza logica* degli enunciati $P_1, ..., P_n$, se, essendo le premesse $P_1, ..., P_n$ vere, è necessariamente vera anche la conclusione C[1].

Quindi, un'inferenza è valida quando non è logicamente possibile che le premesse siano vere e la conclusione falsa. Prima di approfondire ulteriormente la relazione di conseguenza logica è opportuno chiarire due aspetti. Il primo, riguarda il concetto di *inferenza corretta*. Se un'inferenza è valida e le sue premesse sono vere, allora essa è detta corretta. In altre parole, un'inferenza è corretta quando le premesse sono vere e non è *logicamente possibile* che le premesse siano vere e la conclusione sia falsa. Il secondo aspetto concerne il significato dell'espressione "formulate in un determinato linguaggio" nella *Definizione 2.1*. Riteniamo, infatti, che la conoscenza scientifica[2] sia sempre di natura proposizionale, poiché è formulata e comunicata attraverso un linguaggio specifico:

> La conoscenza scientifica è proposizionale perché è concepita e comunicata in un determinato linguaggio. [. . .] Il linguaggio consente la comunicazione della nostra conoscenza tematica sul mondo e la stessa messa a tema di problemi che concernono differenti domini di oggetti. In assenza del linguaggio, sarebbe impossibile fissare tali problemi e iniziare uno studio, soggettivo o intersoggettivo, delle possibili soluzioni. In generale, si può dire che un linguaggio è un sistema che consente la costruzione e l'interpretazione di segni. (Giordani 2014, p. 10 e p. 15)

Per questo motivo, *i*) la logica deve essere intesa come lo studio delle condizioni di verità delle asserzioni e delle condizioni di validità delle argomentazioni presentate in un determinato linguaggio; e *ii*) la conseguenza logica è sempre una relazione tra enunciati e, nello specifico, è il nesso che sussiste tra le premesse e la conclusione di un'inferenza valida. Resta naturalmente da chiedersi "da quali proprietà dipende la conseguenza logica?". Questa domanda chiama direttamente in causa la nozione di *forma logica*. Il rapporto tra conseguenza e forma logica caratterizza la scienza della logica fin dai suoi albori nella *sillogistica aristotelica*. L'importanza di questo passaggio è stata evidenziata dal grande logico olandese Evert Willem Beth (1908-1964), il quale, analizzando la tradizione logica antica che passa anche per l'affermazione di Teofrasto (riportata nel commento di Alessandro d'Afrodisia agli *Analitici Primi*), afferma:

> Aristotele conduce la spiegazione con riferimenti a lettere per rendere chiaro che la conclusione sorge, non in virtù del contenuto, ma in virtù della forma

[1] La validità si fonda esclusivamente sulla relazione necessaria che intercorre tra le premesse e la conclusione; necessariamente se accettiamo come vere le premesse dobbiamo accettare come vera la conclusione: non stiamo dichiarando che occorra che le premesse siano vere o che la conclusione sia vera.

[2] Sulla natura delle teorie scientifiche e sul loro rapporto con il mondo si veda (Giunti, Ledda & Sergioli 2016).

> e della composizione e modo delle premesse; infatti il sillogismo è conclusivo non in ragione del contenuto ma perché le premesse formano una coppia opportuna. (Beth 1963, p. 59)

La logica è quindi formale perché è lo studio della forma in virtù della quale le condizioni di verità delle asserzioni e le condizioni di validità delle argomentazioni, costruite in un linguaggio, sono determinate. Come magistralmente chiarisce Kant:

> [. . .] ma il confine della logica è sufficientemente determinato da ciò, che essa è una scienza, la quale espone per disteso e prova rigorosamente soltanto le regole formali di tutto il pensiero, sia questo a priori od empirico, abbia qualsivoglia origine ed oggetto, trovi nel nostro spirito ostacoli accidentali o naturali. (Kant 1781/87, p.14)

La logica tratta forme (o *schemi*) che vengono interpretate in modo diverso in ciascuna applicazione o dominio: un'inferenza è valida se in tutte le *interpretazioni* nelle quali le premesse sono vere anche la conclusione è vera.

Seguendo Beth – ed eminenti storici della logica quali Heinrich Scholz (1884-1956) e Jan Łukasiewicz (1878-1956) – si può affermare che uno dei grandi apporti del pensiero greco è "l'aver realizzato il carattere formale della logica" (Beth 1963, p. 39).

Principio 2.1. [*Principio di formalità*] Una conclusione logica segue non in virtù del contenuto, ma in virtù della forma.

La formalità della logica è quindi essenziale poiché le condizioni di validità delle inferenze sono legate alla forma delle inferenze. Se un'inferenza è valida, ogni inferenza della stessa forma è valida[3].

In campo matematico, la lezione di Aristotele (e degli Stoici) riguardo alla formalità della logica, si era persa a partire da Cartesio (1596-1650). Cartesio era convinto che la matematica e la logica divergessero e che sola nella prima il discorso avesse un contenuto[4]. Per questo motivo, il *metodo assiomatico moderno* (o metodo ipotetico-deduttivo), sviluppatosi nell'ultima parte dell'Ottocento e fondato sull'idea che gli assiomi di una teoria siano proposizioni primitive (ossia non conseguenze di alcuna altra proposizione all'interno della teoria) che coinvolgono termini o concetti primitivi, è stato inteso come una "rivoluzione che si è attuata nella concezione della natura

[3] L'esigenza di indagare, comprendere e rendere esplicite le forme valide di un'argomentazione è connaturata all'uomo ed è conseguenza del suo essere un "animale ragionevole".

[4] Per Cartesio solo la matematica era una vera *ars inveniendi*. In realtà, già negli *Elementi* di Euclide e, più in generale, nel modello del sapere greco, la trattazione formale non si era sposata con la matematica. Infatti, se da un lato Euclide imposta gli *Elementi* a partire da assiomi (postulati) iniziali, dall'altro introduce definizioni di termini primitivi (come punto e retta), utilizza ipotesi non giustificate dagli assiomi e non prevede un trattamento puramente formale delle inferenze.

della scienza matematica e della sua metodologia" (Lolli 2011, p. 14)[5]. La rivoluzione della natura della scienza matematica si giustifica nel fatto che "mai prima si era avuta la consapevolezza che il discorso matematico fosse formale" (*ibidem*). In tal senso, sono emblematiche le parole di Moritz Pasch (1843-1930) sulla *rivoluzione formale* in atto nella geometria dell'Ottocento:

> Affinché la geometria diventasse una vera scienza deduttiva era necessario che le derivazioni delle conseguenze fossero indipendenti dal senso dei concetti geometrici, come devono esserlo dalle figure. Nel corso di una deduzione, è lecito e può essere utile pensare al significato dei concetti in giuoco; ma non è necessario. Quando diventa necessario, è segno di un difetto delle deduzioni e di un'inadeguatezza delle proposizioni assunte per sostenere la dimostrazione. (Pasch 1882, p. 82, *traduzione nostra*)

Questa *rivoluzione formale* trova fondamento nel recupero della logica classica aristotelica. Come sottolinea Abraham Robinson (1918-1974):

> La logica ha come oggetto le forme e le leggi del pensiero. La scoperta della grande efficacia del tipo di ragionamento matematico, unita alla considerazione che la matematica costituisca un campo naturale per l'applicazione e l'esemplificazione di argomenti logici astratti, ha fatto si che nel XX secolo i legami tra logica e matematica si siano andati sempre rafforzando. É quindi abituale contraddistinguere la logica moderna per mezzo dell'aggettivo "matematica". Cionondimeno questa disciplina è rimasta sostanzialmente qual era ai tempi di Aristotele. Non vi è motivo di tracciare una distinzione netta, come vorrebbero alcuni sostenitori della "logica matematica" o della "logica aristotelica", i primi per sottolineare la maggiore efficacia del loro indirizzo, i secondi per rivendicare la maggiore profondità di pensiero. (Robinson 1978, p. 21)

2.2 Sintassi della logica proposizionale

Sulla base della *Definzione 2.1.* e delle considerazioni esposte nella precedente sezione, possiamo ora fornire una definizione più rigorosa e completa di logica

[5] Intuitivamente, una dimostrazione è un argomento valido che stabilisce la verità di un enunciato, che talvolta chiameremo *teorema*. Una dimostrazione può basarsi sulle ipotesi esplicitamente assunte nell'enunciato da dimostrare, sugli assiomi considerati veri e sui teoremi precedentemente dimostrati. Gli assiomi possono essere introdotti utilizzando termini primitivi, che non richiedono definizione. Tuttavia, tutti gli altri termini presenti nei teoremi e nelle loro dimostrazioni devono essere definiti in modo rigoroso attraverso opportune definizioni. Oltre ai teoremi, è possibile individuare altre classi di enunciati: le *proposizioni*, i *lemmi*, i *corollari* e le *congetture*. Le proposizioni sono enunciati con finalità esplicative, di statuto inferiore rispetto ai teoremi. I lemmi sono enunciati con funzione prevalentemente strumentale, utili per semplificare una dimostrazione. I corollari sono enunciati che derivano come conseguenze immediate di uno o più teoremi o lemmi precedentemente dimostrati. Le congetture sono enunciati ritenuti veri sulla base di una parziale evidenza, ma non ancora dimostrati. Infine, i teoremi si suddividono in due categorie principali: i *teoremi universali*, che affermano che tutti gli individui di un determinato dominio possiedono una o più proprietà, e i *teoremi di esistenza*, che stabiliscono l'esistenza di almeno un oggetto appartenente a un determinato dominio che gode di una o più proprietà.

Definizione 2.2. [*Logica*] La logica è lo studio delle strutture formali del discorso assertivo e argomentativo e dei nessi di conseguenza logica determinati all'interno di un certo linguaggio.

La notazione che assumeremo in questa e nelle prossime sezioni ha radici antiche. L'esigenza di trattare le "leggi del pensiero" mediante un apparato simbolico che le rendesse prive di ambiguità è già presente nell'idea di *calculus ratiocinator* di Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716). Leibniz riteneva che il suo linguaggio rigoroso (*characteristica universalis*) potesse costituire l'ossatura di un "calcolo dei concetti", capace di risolvere ogni disputa scientifica in modo puramente deduttivo.

Tuttavia, fu solo tra la seconda metà dell'Ottocento e i primi anni del Novecento che l'introduzione di un linguaggio formale per la logica ricevette un impulso decisivo. L'elemento fondamentale del metodo simbolico-matematico risiede nella definizione di un linguaggio formale che, a differenza dei linguaggi naturali, permette una chiara distinzione tra sintassi e semantica. La sintassi stabilisce quali sequenze di simboli sono da considerarsi ben formate; la semantica stabilisce come interpretare le espressioni simboliche sintatticamente corrette. Dalla definizione rigorosa di una funzione di valutazione conseguono quelle di verità, conseguenza e indipendenza logica. La distinzione tra sintassi e semantica non va intesa in modo contrapposto, ma complementare. Infatti, una sintassi definita a prescindere dalla semantica rende possibile l'elaborazione simbolica delle proposizioni tramite veri e propri calcoli. La semantica, nella sua generalità, può rendere rigorosa l'intuizione di Leibniz secondo cui le proposizioni logicamente valide sono quelle vere in tutti i mondi possibili.

Prima di introdurre la sintassi della logica proposizionale, è necessario definire il concetto generale di *sistema di logica* $\mathbb{L}$.

Definizione 2.3. [*Sistema di Logica*]

$$\mathbb{L} = (\mathcal{L}, \mathcal{C})$$

Un sistema di logica $\mathbb{L}$ è una coppia in cui $\mathcal{L}$ è un linguaggio e $\mathcal{C}$ è una relazione di conseguenza il cui dominio è costituito da insiemi di proposizioni del linguaggio e il cui codominio è costituito da proposizioni del linguaggio. Lo studio di un sistema di logica richiede la specificazione del suo linguaggio e della relazione di conseguenza corrispondente. Iniziamo presentando la definizione del linguaggio della logica proposizionale classica $\mathcal{L}_0$ nel sistema di logica proposizionale classica $\mathbb{L}_0$. Per introdurre il linguaggio proposizionale, espliciteremo costruttivamente la nozione di formula. Conseguentemente, definiremo un criterio per distinguere quali stringhe di simboli siano da considerarsi formule ben formate e quali no.

Definizione 2.4. [*Linguaggio* $\mathcal{L}_0$]

$$\mathcal{L}_0 = (A(\mathcal{L}_0), R(\mathcal{L}_0))$$

in cui:

- $A(\mathcal{L}_0)$ è l'alfabeto (i segni primitivi) del linguaggio;
- $R(\mathcal{L}_0)$ sono le regole di costruzione dei segni complessi.

Definizione 2.5. [*Alfabeto* $A(\mathcal{L}_0)$] L'alfabeto $A(\mathcal{L}_0)$ contiene

- un insieme numerabile di simboli che chiameremo variabili proposizionali:

$$Var_0 := \{p_i | i \in \mathbb{N}\};$$

- un insieme di simboli per operatori logici: $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$;
- un insieme di simboli ausiliari: $\{(,)\}$.

Definire l'alfabeto di un linguaggio non è ancora abbastanza; non siamo interessati a qualsiasi stringa simboli di $A(\mathcal{L}_0)$. Dobbiamo definire anche quali sono le combinazioni di membri di tale vocabolario che sono da accettare come espressioni del linguaggio, ossia come unità sintattiche ben formate. Compito della sintassi è definire le regole $R(\mathcal{L}_0)$ attraverso le quali ottenere le stringhe di simboli che considereremo nel nostro discorso e che chiameremo *formule ben formate* (fbf). Per denotarle in forma generica, useremo le lettere minuscole dell'alfabeto greco: $\varphi, \psi, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu, \ldots$, e le chiameremo *metavariabili*, mentre i segni $\Gamma, \Delta, \Sigma, \Theta$ sono segni per *insiemi finiti* di formule. Essendo le fbf di $\mathcal{L}_0$ di numero infinito, per poter formalizzare enunciati di qualsivoglia complessità non è possibile definire le fbf semplicemente elencandole tutte. Per questo motivo, diamo una definizione ricorsiva degli elementi dell'insieme $Form_0$ delle fbf di $\mathcal{L}_0$.

Definizione 2.6. [*Regole in* $R(\mathcal{L}_0)$] L'insieme $Form_0$ delle fbf è il più piccolo insieme chiuso rispetto alle seguenti regole

- $Var_0 \subseteq Form_0$;
- se $\varphi \in Form_0$, allora $(\neg\varphi) \in Form_0$;
- se $\varphi, \psi \in Form_0$, allora $(\varphi \wedge \psi) \in Form$;
- se $\varphi, \psi \in Form_0$, allora $(\varphi \vee \psi) \in Form$;
- se $\varphi, \psi \in Form_0$, allora $(\varphi \rightarrow \psi) \in Form_0$[6].

Convenzione 2.1. Introduciamo il connettivo del bicondizionale $\leftrightarrow$ e le corrispondenti equivalenze tra i connettivi logici

- $\varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$;
- $\varphi \vee \psi \equiv \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$;
- $\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$.

[6] Si noti che abbiamo usato le lettere greche φ e ψ per indicare delle formule arbitrarie. Se dunque i simboli in Var_0 sono le variabili nel linguaggio oggetto di studio, le lettere greche rappresentano le *metavariabili* appartenenti al *metalinguaggio* che utilizziamo per parlare del *linguaggio oggetto*.

In $\mathcal{L}_0$ una formula è detta *atomica* se non contiene connettivi, cioè se è costituita solo da una lettera proposizionale, ad esempio p_1. Al contrario, le formule *complesse* sono costruite a partire da quelle atomiche combinandole sintatticamente mediante i connettivi[7] e secondo le regole $R(\mathcal{L}_0)$. Ad esempio, nella formula $((p_1 \wedge p_2) \vee p_3)$ la formula è costruita a partire dalla congiunzione delle formule atomiche p_1 e p_2 e dalla disgiunzione di quest'ultima formula congiuntiva con la proposizione atomica p_3. L'ultimo connettivo $\vee$ utilizzato per costruire la formula complessa è detto *connettivo principale*[8].

Le regole che abbiamo stabilito conducono a un uso eccessivo delle parentesi. Per semplificare l'aspetto delle formule complesse adotteremo le seguenti convenzioni: *i*) le parentesi più esterne di una formula possono essere omesse; e *ii*) i connettivi hanno la seguente forza sintattica: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$. In assenza di parentesi il connettivo più forte ha la priorità nella costruzione sintattica delle formule

Priorità	**Connettivi**
Più alta	$\neg$
$\vdots$	$\wedge$
$\vdots$	$\vee$
Più bassa	$\rightarrow$

Convenzione 2.2. Siano $\varphi, \psi \in Form_0$. Assumiamo che

- $(\neg\varphi) \star \psi \equiv \neg\varphi \star \psi$ e $\varphi \star (\neg\psi) \equiv \varphi \star \neg\psi$, per ogni $\star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$;
- $(\varphi \star \psi) \rightarrow \gamma \equiv \varphi \star \psi \rightarrow \gamma$ e $\gamma \rightarrow (\varphi \star \psi) \equiv \gamma \rightarrow \varphi \star \psi$, per ogni $\star \in \{\wedge, \vee\}$.

Ad esempio, la scrittura

$$((\neg p) \wedge (\neg q)) \rightarrow (r \vee s)$$

si semplifica in

$$(\neg p \wedge \neg q) \rightarrow (r \vee s)$$

Una nozione importante è quella di grado di complessità di una formula.

Definizione 2.7. [*Grado di complessità di una formula*] Sia φ una formula. Il suo grado di complessità, indicato con $\#(\varphi)$, è un numero naturale associato a φ come segue

[7] Osserviamo che il connettivo $\neg$ è un connettivo *unario* perché agisce su una sola proposizione o formula; al contrario, i connettivi $\wedge, \vee, \rightarrow$ sono *binari* perché agiscono su due proposizioni o formule.

[8] I simboli $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ non hanno, al momento, alcun significato; essi sono solo dei simboli che devono essere manipolati in modo puramente formale, secondo le regole $R(\mathcal{L}_0)$ della sintassi.

- se $\varphi \in Var_0$, allora $\#(\varphi) = 0$;
- se $\varphi = \neg\psi$, allora $\#(\varphi) = \#(\psi) + 1$;
- se $\varphi = \psi \wedge \gamma$, allora $\#(\varphi) = \#(\psi) + \#(\gamma) + 1$;
- se $\varphi = \psi \vee \gamma$, allora $\#(\varphi) = \#(\psi) + \#(\gamma) + 1$;
- se $\varphi = \psi \to \gamma$, allora $\#(\varphi) = \#(\psi) + \#(\gamma) + 1$.

Intuitivamente, il grado di complessità è la funzione che "conta" i connettivi all'interno di una formula.

Esempio 2.1. Il grado di complessità della formula $(\neg p \vee q) \to (p \to q)$ è

$$\#((\neg p \vee q) \to (p \to q)) =$$

$$(\#(\neg p) + \#(q) + 1) + (\#(p) + \#(q) + 1) + 1 =$$

$$(1 + 0 + 1) + (0 + 0 + 1) + 1 = 4$$

Esempio 2.2. Il grado di complessità della formula $\neg(p \wedge \neg p)$ è

$$\#(\neg(p \wedge \neg p)) =$$

$$(\#(p) + \#(\neg p) + 1) + 1) =$$

$$(0 + 1 + 1) + 1 = 3$$

Sulla base di $R(\mathcal{L}_0)$ ogni formula può essere costruita induttivamente a partire dalle variabili proposizionali che la compongono. Possiamo dunque associare ad ogni $\varphi \in Form_0$, la sua *sequenza di formazione*.

Definizione 2.8. [*Sequenza di formazione*] Sia $\varphi \in Form_0$. Una sequenza di formazione associata a φ, che indichiamo con $S(\varphi)$, è una sequenza finita di formule $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ con la proprietà che, per ogni formula φ_i con $i \in \{1, \ldots, n\}$, φ_i soddisfa almeno una delle seguenti condizioni

- $\varphi_i \in Var_0$;
- $\varphi_i = \neg\varphi_j$, per qualche $j > i$;
- $\varphi_i = \varphi_j \wedge \varphi_k$, per qualche $j, k > i$;
- $\varphi_i = \varphi_j \vee \varphi_k$, per qualche $j, k > i$;
- $\varphi_i = \varphi_j \to \varphi_k$, per qualche $j, k > i$.

Inoltre $\varphi = \varphi_1$.

Esempio 2.3. Una sequenza di formazione della formula $\varphi = p \wedge q \vee r$ è

1. $p \wedge q \vee r$
2. $p \wedge q$
3. r
4. p
5. q

Quindi $S(\varphi) = ((p \wedge q \vee r), (p \wedge q), (r), (p), (q))$.

Esempio 2.4. Una sequenza di formazione della formula $\varphi = (p \to q) \to \neg r$ è

1. $(p \to q) \to \neg r$
2. $p \to q$
3. $\neg r$
4. p
5. q
6. r

Quindi $S(\varphi) = ((p \to q) \to \neg r), (p \to q), (\neg r), (p), (q), (r))$.

Lemma 2.1. [*Decomposizione unica*] Ogni formula può essere formata in uno e un solo modo.

Definizione 2.9. [*Sottoformula*] Siano $\varphi, \psi \in Form_0$. Diremo che φ è una *sottoformula* di ψ se φ occorre in una sequenza di formazione di ψ.

Definizione 2.10. [*Sottoformula immediata*] Sia $\varphi \in Form_0$. Definiamo l'insieme delle *sottoformule immediate* di φ, che denotiamo con $SFI(\varphi)$, come segue

1. Se $\varphi = p \in Var_0$, allora $SFI(\varphi) = \emptyset$;
2. Se $\varphi = \neg\psi$, allora $SFI(\varphi) = \{\psi\}$;
3. Se $\varphi = \{\psi \wedge \gamma, \psi \vee \gamma, \psi \to \gamma\}$, allora $SFI(\varphi) = \{\psi, \gamma\}$. In questi casi, diremo che ψ e γ sono la sottoformula immediata *sinistra* e *destra* di φ, rispettivamente.

Naturalmente, una formula che non contiene sottoformule immediate (i.e. una variabile proposizionale) è una formula semplice o atomica, mentre una formula che contiene sottoformule è una formula complessa o molecolare. Il *connettivo principale* di una formula φ è il connettivo che ha come argomenti le sottoformule immediate di φ.

Definizione 2.11. [*Multinsieme delle sottoformule*] Data una formula φ, il multiinsieme delle sue sottoformule $MS(\varphi)$ è definito ricorsivamente nel seguente modo

- Se $\varphi = p \in Var$, allora $MS(\varphi) = \{\varphi\}$;
- Se $\varphi = \neg\psi$, allora $MS(\varphi) = \{\varphi\} \cup MS(\psi)$;

- Se $\varphi = \psi \star \gamma$, allora $MS(\varphi) = \{\varphi\} \cup MS(\psi) \cup MS(\gamma)$, con $\star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$.

Esempio 2.5. Data la formula $\varphi \vee \neg\varphi$ il $MS(\varphi)$ è

$$MS(\varphi \vee \neg\varphi) = \{\varphi \vee \neg\varphi\} \cup MS(\varphi) \cup MS(\neg\varphi) =$$

$$\{\varphi \vee \neg\varphi\} \cup \{\varphi\} \cup (\varphi, \neg\varphi) =$$

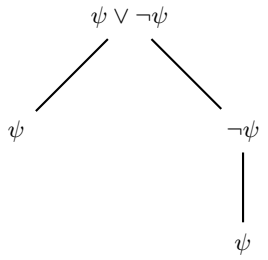
$$\{\varphi \vee \neg\varphi, \varphi, \neg\varphi, \varphi\}$$

Ogni formula φ e il multiinsieme delle sue sottoformule $MS(\varphi)$ possono essere rappresentate attraverso l'*albero di struttura* di φ. Un albero di struttura di φ è un *albero diadico* o *binario* e, nello specifico, è una struttura $(X, \leq)$ dove X è un insieme finito e $\leq$ è una relazione d'ordine parziale dotata di minimo e in cui ogni elemento ha al più due successori immediati. Gli elementi di X prendono il nome di *nodi*, il minimo di X è la *radice* dell'albero mentre gli elementi massimali predono il nome di *foglie*.

L'albero di struttura può essere facilmente costruito applicando le precedenti definizioni in questo modo

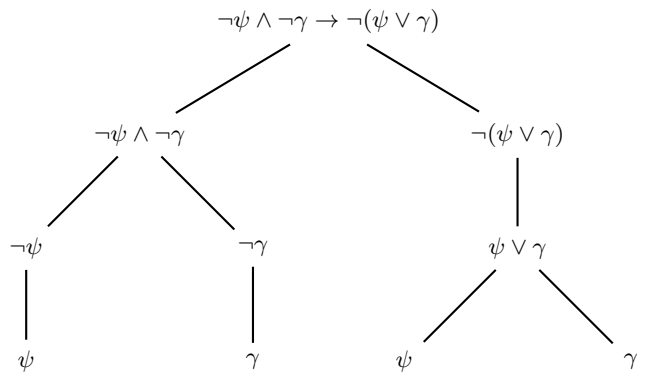
- se la formula è atomica, l'albero ha un unico nodo etichettato con tale formula;
- se la formula è della forma $(\neg\psi)$, la radice è etichettata con la formula $\neg\psi$ e ha come nodo figli un nodo che è radice dell'albero di struttura di ψ;
- se la formula è della forma $(\psi \star \gamma)$, con $\star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, la radice è etichettata con $\psi \star \gamma$ e ha come figli due nodi: quello di sinistra è la radice dell'albero di struttura di ψ, quello di destra è la radice dell'albero di struttura di γ.

Esempio 2.6. Albero di struttura per $\varphi = \psi \vee \neg\psi$:



$MS(\varphi) = \{\psi \vee \neg\psi, \psi, \neg\psi, \psi\}$

Esempio 2.7. Albero di struttura per $\varphi = \neg\psi \wedge \neg\gamma \rightarrow \neg(\psi \vee \gamma)$



$MS(\varphi) = \{\neg\psi \wedge \neg\gamma \to \neg(\psi \vee \gamma), \neg\psi \wedge \neg\gamma, \neg(\psi \vee \gamma), \neg\psi, \neg\gamma, \psi \vee \gamma, \psi, \gamma, \psi, \gamma\}$

Concludiamo osservando che

- prende il nome di *altezza di una formula* $h(\varphi)$, la lunghezza del più lungo cammino dalla radice ad una foglia: ad esempio l'altezza di $\psi \vee \neg\psi$ è 2, mentre l'altezza di $\neg\psi \wedge \neg\gamma \to \neg(\psi \vee \gamma)$ è 3;
- data una formula possiamo costruire in modo non ambiguo il suo albero (*Lemma 2.1.*);
- se due formule hanno lo stesso albero di struttura allora sono la stessa formula.

Definite le proprietà sintattiche del linguaggio, un sistema di logica richiede la specificazione della relazione di conseguenza $\mathcal{C}$. La relazione di conseguenza può essere caratterizzata in modo *semantico* o in modo *sintattico* (o *sintattico-assiomatico*)

- caratterizzazione semantica: la verità delle premesse *implica* logicamente la verità della conclusione: $\mathbb{L} = (\mathcal{L}, \Vdash)$;
- caratterizzazione sintattica: l'insieme delle premesse *include* logicamente la conclusione: $\mathbb{L} = (\mathcal{L}, \vdash)$.

Quando si definisce una relazione di conseguenza logica su un linguaggio $\mathcal{L}$ sia in modo sintattico sia in modo semantico, è naturale chiedersi che relazione esista tra i due sistemi $(\mathcal{L}, \vdash)$ e $(\mathcal{L}, \Vdash)$. La risposta è data dalle proprietà di *correttezza* e di *completezza* del sistema sintattico-assiomatico rispetto al sistema semantico

- un sistema sintattico-assiomatico $\mathbb{L} = (\mathcal{L}, \vdash_{\mathbb{L}})$ si dice *corretto* rispetto al sistema semantico $\mathbb{L} = (\mathcal{L}, \Vdash_{\mathbb{L}})$ quando, per ogni insieme di proposizioni Γ e per ogni proposizione φ, vale che
$$\Gamma \vdash_{\mathbb{L}} \varphi \text{ allora } \Gamma \Vdash_{\mathbb{L}} \varphi$$
- un sistema sintattico-assiomatico $\mathbb{L} = (\mathcal{L}, \vdash_{\mathbb{L}})$ si dice *completo* rispetto al sistema semantico $\mathbb{L} = (\mathcal{L}, \Vdash_{\mathbb{L}})$ quando, per ogni insieme di proposizioni Γ e per ogni proposizione φ, vale che
$$\Gamma \Vdash_{\mathbb{L}} \varphi \text{ allora } \Gamma \vdash_{\mathbb{L}} \varphi$$

Un sistema assiomatico corretto e completo cattura perfettamente il rapporto tra *dimostrazione* e *verità*. Grazie alla correttezza, il sistema garantisce che ogni argomento che possiamo derivare con le sue regole è effettivamente valido. Viceversa, la completezza assicura che non c'è alcun argomento valido che il sistema non possa dimostrare. Dimostrare la correttezza e la completezza di un sistema è quindi uno dei compiti più importanti in logica, poiché stabilisce un legame indissolubile tra la sintassi e la semantica. Il problema di catturare tutti gli argomenti validi per il linguaggio proposizionale e quello dei predicati del primo ordine è stato risolto nella prima metà del Novecento, grazie soprattutto al lavoro di Hilbert, Ackermann, Gödel, Tarski, Heinrich Behmann (1891-1970) e Leon Henkin (1921-2006).

In questo modo, un sistema di logica è dato dalla specificazione di un linguaggio e dalla specificazione semantica o sintattica della relazione di conseguenza logica sul linguaggio. La logica, avendo come oggetto i sistemi di logica, è una disciplina di secondo livello (*metateoria*): il linguaggio di un sistema logico che studiamo è chiamato *linguaggio oggetto*, mentre il linguaggio che usiamo per studiarlo è chiamato *metalinguaggio*. Lo studio di un sistema di logica avviene dunque nel metalinguaggio e può essere suddiviso in tre aree principali

- l'area *sintattica*, in cui si analizza la struttura e la composizione delle proposizioni del linguaggio oggetto;
- l'area *semantica*, in cui si esamina la relazione di conseguenza logica, intesa dal punto di vista semantico, come una relazione che preserva la verità attraverso la definizione del concetto di verità di una proposizione in un modello (*teoria dei modelli*);
- l'area *sintattico-assiomatica*, in cui si studia la relazione di conseguenza logica dal punto di vista sintattico, intesa come una relazione di *derivabilità* secondo determinate regole (*teoria della dimostrazione*).

Una chiara e rigorosa definizione di un linguaggio logico, attraverso una definizione matematica della sua sintassi e della sua semantica, fu raggiunta a opera della scuola di logica di Varsavia e il passo decisivo, in tal senso, fu fatto da Tarski intorno al 1930. Per comprendere la distinzione tra semantica e sintassi in logica è utile considerare anche la differenza tra nozioni *finitarie* e *infinitarie*. La sintassi logica si basa su regole di inferenza e strutture formali che possono essere applicate in modo meccanico, combinatorio e finitario, permettendo di verificare la correttezza di un ragionamento senza fare riferimento a insiemi infiniti o a verità assolute. Al contrario, la semantica logica introduce concetti infinitari, come la nozione di verità e il rapporto di conseguenza logica, che richiedono il riferimento a tutti i modelli possibili e non sono direttamente manipolabili in modo computazionale. Come osserva Sergio Galvan:

> La logica presenta due dimensioni: la dimensione semantica e la dimensione sintattica. Ora la dimensione semantica è caratterizzata da nozioni infinitarie

come la verità o il nesso di conseguenza logica, concetti che in forza della loro natura infinitaria non sono immediatamente dominabili dalla mente umana. La costruzione della sintassi logica deriva proprio dalla necessità di elaborare strumenti completamente dominabili dalla menta umana capaci di dirci quando siamo davanti ad una conseguenza logica o a una proposizione logicamente vera, ovvero che siano in grado di dirci quando ragioniamo correttamente. (Galvan 2012, pp. 275-276)

2.3 Semantica della logica proposizionale

Definita la sintassi possiamo ora introdurre la nozione semantica di conseguenza logica attraverso le definizioni di *modello* e di *verità in un modello*. Un modello per il linguaggio $\mathcal{L}_0$ è costituito da una funzione di valutazione delle formule proposizionali sintatticamente corrette (le formule in $Form_0$) sui due valori di verità classici: *vero* (1) e *falso* (0).

Definizione 2.12. [*Modello per* $\mathcal{L}_0$]

$$M = (\{1, 0\}, v)$$

Un modello per $\mathcal{L}_0$ è una coppia in cui $\{1, 0\}$ sono i valori di verità e v è una funzione di valutazione tale che

$$v : Form_0 \longrightarrow \{1, 0\}$$

La funzione v (*detta anche valutazione Booleana*) associa ad ogni fbf φ il suo valore di verità $v(\varphi)$. Dal punto di vista semantico, una funzione di valutazione è una distribuzione dei valori di verità sulle proposizioni atomiche. Poiché ogni fbf si costruisce combinando tra loro delle proposizioni atomiche attraverso l'uso dei connettivi logici (secondo $R(\mathcal{L}_0)$), per definire la funzione v sull'insieme $Form_0$ di tutte le fbf è sufficiente definire v per le proposizioni atomiche e poi descrivere il comportamento dei vari connettivi[9]

$$v(p_i) \in \{1, 0\}, \text{ per ogni variabile proposizionale } p_i$$

Un modello è quindi completamente determinato dalla sua funzione di valutazione e l'insieme di modelli per $\mathcal{L}_0$ è indicato con M_0. Immaginiamo, ad esempio, di avere quattro proposizioni primitive p_1, p_2, p_3 e p_4, una funzione di valutazione può essere facilmente presentata come nella TAB. 2.1

[9] In genere, si distingue tra la funzione di valutazione v, che assegna un valore in $\{1, 0\}$ a ogni formula, e la funzione di *interpretazione* $i : Var \to \{1, 0\}$, che assegna un valore a tutte e sole le variabili proposizionali. In base alla *Definizione 2.6.*, per semplificare la notazione, "assorbiremo" – solo in $\mathbb{L}_0$ –, l'interpretazione nella valutazione.

$v : (p_i) \to \{1, 0\}$	$v(p_1) = 1$
	$v(p_2) = 0$
	$v(p_3) = 0$
	$v(p_4) = 1$

Tabella 2.1

Senza addentrarci in un'analisi metafisica dettagliata della logica classica, possiamo affermare, in generale, che una proposizione presenta sempre delle *condizioni di verità*, ovvero un insieme di *stati di cose* s. Una proposizione è vera quando gli stati di cose presentati sono *attuali*. Il concetto di stato di cose è primitivo: esso rappresenta un modo in cui le cose stanno o sarebbero potuto stare, secondo un'accezione ampia di *possibilità logica*. Uno stato di cose si dice completo se e solo se include o esclude ogni altro stato di cose. Questo concetto consente di introdurre una nozione fondamentale in logica: quella di *mondo possibile*. Intuitivamente, un mondo possibile non è altro che un modo in cui il *mondo attuale sarebbe potuto essere*. Da ciò segue che il mondo attuale è semplicemente uno tra i molti mondi possibili. In un mondo attuale quindi

- ogni stato di cose incluso nel mondo attuale è attuale;
- ogni stato di cose attuale è incluso nel mondo attuale;
- il mondo attuale include tutti e solo gli stati di cose attuali ed esclude tutti e solo gli stati di cose non attuali.

Supponiamo che il mondo w_i sia un modello estremamente semplice e limitato. Un mondo, in questo modello, consiste in una scacchiera 2×2 divisa in quattro celle $\mathfrak{c}$ come rappresentato in FIG. 2.1.

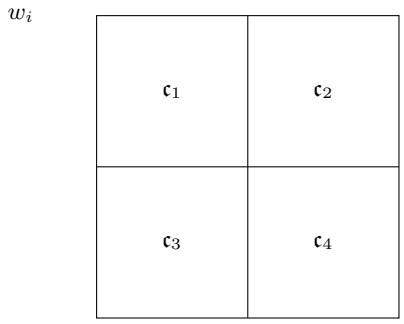


Figura 2.1: Un mondo possibile 2×2 diviso in quattro celle.

Nel nostro modello, una cella può essere *piena/occupata* o *vuota/libera*. Una cella piena è una cella di colore grigio con all'interno un quadrato di colore verde, mentre una cella vuota sarà sempre una cella di colore grigio ma priva del quadrato verde. Ad esempio, nel mondo w_1 in FIG. 2.2 sono piene solo la prima e l'ultima cella.

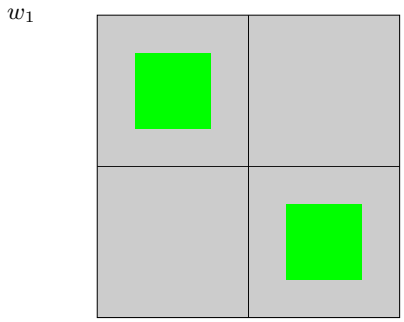
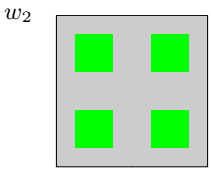
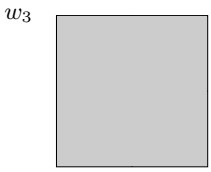


Figura 2.2: Un mondo possibile con la prima e l'ultima cella piena.

Altre configurazioni di mondi possibili potrebbero essere le due configurazioni estreme: un mondo possibile totalmente pieno come w_2 e un mondo possibile totalmente vuoto come w_3 in FIG. 2.3.



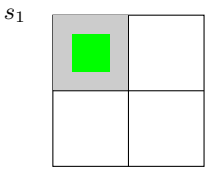
(a) Mondo con tutte le celle piene.



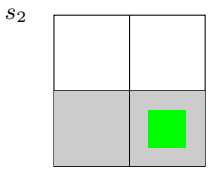
(b) Mondo con tutte le celle vuote.

Figura 2.3: Confronto tra due configurazioni estreme di mondo possibile.

All'interno di un mondo possibile, uno stato di cose è un modo in cui le cose possono stare, una *porzione di mondo*. Ad esempio, in FIG. 2.4 lo stato di cose s_1 prende in considerazione solo la porzione di mondo riguardante la prima cella, mentre lo stato di cose s_2 rappresenta lo stato di cose riguardante solo la terza e la quarta cella.



(a) Stato di cose sulla prima cella.



(b) Stato di cose sulla terza e quarta cella.

Figura 2.4: Confronto tra due stati di cose in un mondo possibile.

In questi schemi, le porzioni di mondo considerate sono solo le celle di colore grigio, mentre le porzioni di mondo colorate di bianco non sono porzioni su cui si estende lo stato di cose esemplificato. Quindi, s_1 è lo stato di cose tale che la prima cella della

scacchiera è piena (e viene anche detto *fatto*[10]); s_2 è lo stato di cose tale che la terza cella della scacchiera è vuota e la quarta cella è piena.

L'ultimo aspetto da esaminare è la *corrispondenza logica* tra proposizioni e mondo. Ogni proposizione atomica o molecolare punta una cella o più celle del mondo. Ad esempio, data p_i, con $i = 1, \ldots, 4$, la proposizione atomica p_i esprime il fatto che la cella i del nostro *mondo possibile* sia piena (1) o vuota (0). In base a TAB. 2.1, p_1 afferma che la prima cella $\mathfrak{c}_1$ del mondo w_1 è piena, (p_2) e (p_3) affermano che la seconda e la terza cella $\mathfrak{c}_2$ e $\mathfrak{c}_3$ sono vuote e, infine, p_4 afferma che la quarta cella $\mathfrak{c}_4$ è piena come rappresentato in FIG. 2.5

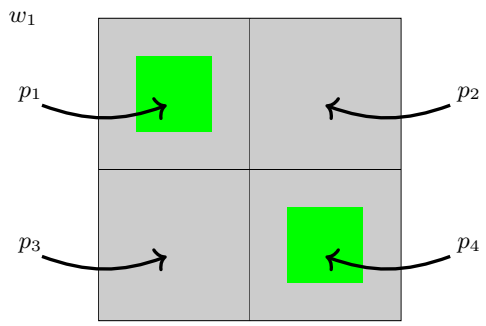


Figura 2.5: Proposizioni atomiche che puntano una cella nel mondo.

Secondo questi assunti teorici esiste una relazione fondamentale tra un linguaggio e la realtà (modello) che esso descrive. Questo conduce alla definizione delle condizioni per cui una proposizione del linguaggio è vera rispetto al modello. I linguaggi sono strumenti per descrivere una realtà e un sistema di logica semanticamente inteso è una conseguenza di questa relazione fondamentale con il mondo, in quanto lo si ricava, come si è visto, dalla corrispondenza tra enunciati e fatti.

Dal punto di vista formale, l'analisi semantica di un linguaggio proposizionale consiste nell'assegnare una valutazione a ciascuna formula, attribuendole uno dei due valori di verità dell'insieme dei valori di verità $\{1, 0\}$. In logica classica non tutte le valutazione sono considerate ammissibili, ma solo quelle che rispettano determinati principi.

Principio 2.2. [*Principio di bivalenza*]. Ogni proposizione possiede uno e un solo valore di verità tra due valori di verità, il vero e il falso.

Principio 2.3. [*Principio di non inflazione*] Esistono solo due valori di verità.

Principio 2.4. [*Principio di determinazione*] Ogni proposizione possiede un valore di verità.

[10] "*T.2*: Ciò che accade, il fatto, è il sussistere di stati di cose". (Wittgenstein 1921, p.14).

Principio 2.5. [*Principio di non contraddizione*] Ogni proposizione possiede un solo valore di verità.

Principio 2.6. [*Principio di vero-funzionalità*] Il valore di verità degli enunciati complessi è determinato dal valore di verità degli enunciati che lo compongono in base al significato attribuito agli operatori logici.

Il principio di non contraddizione afferma che nessuna proposizione può essere contemporaneamente vera e falsa. Il principio di non indeterminazione, che deriva dalla congiunzione dei principi di non inflazione e di determinazione, stabilisce che nessuna proposizione può essere né vera né falsa. Quest'ultimo è noto anche come principio di esclusione, o *principio del terzo escluso*. Infine, il principio di vero-funzionalità stabilisce che tutti i connettivi occorrenti in una proposizione complessa sono vero-funzionali quando il valore di verità di quella proposizione può essere determinato attraverso la sola conoscenza dei valori di verità delle proposizioni semplici che in essa compaiono. Per questo, in linea con la posizione di Frege, secondo il quale l'estensione di una proposizione è il suo valore di verità, i connettivi logici si dicono anche connettivi *estensionali*.

Date queste premesse, le condizioni di verità possono essere facilmente e intuitivamente presentate in termini di *tavole di verità*. Le tavole di verità, introdotte nel 1921 indipendentemente da Ludwig Wittgenstein (1889-1951) nel *Tractatus logico-philosophicus* e da Emil Leon Post (1897-1954), sfruttano il concetto di *valore di verità* introdotto da Frege nel 1891-92 in *Über Sinn und Bedeutung*. Secondo il logico tedesco, gli enunciati *saturati*, ovvero gli enunciati le cui componenti sono chiare (ad esempio l'enunciato "La torre Eiffel è alta") possono essere visti come nomi che *denotano* (significano) degli *oggetti* che chiamiamo proprio valori di verità. Le tavole di verità ci permettono di assegnare ad ogni $\varphi \in Form_0$ avente come connettivo principale $\star \in \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$, un valore in $\{1, 0\}$, in funzione dei valori assunti dagli argomenti di $\star$. Il valore di φ è univocamente determinato dai valori assunti dalle variabili proposizionali contenute in φ.

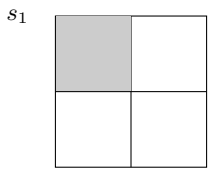
Principio 2.7. [*Principio di composizionalità*] Il valore di una formula è funzione dei valori delle sottoformule immediatamente che la compongono.

Una tavola di verità per un operatore logico registra, per ogni possibile disposizione di argomenti, il valore di verità assegnato dalla funzione di verità alla formula complessa ottenuta dalla sua applicazione. Una disposizione con ripetizioni è una presentazione ordinata di elementi di un insieme. In generale, il calcolo combinatorio ci dice che se un connettivo è *n*-ario allora ci sono 2^n disposizioni possibili dei due valori di verità (1 e 0) che gli argomenti del connettivo possono assumere, cioè 2^n possibili *n*-uple ordinate di argomenti per il connettivo. Le funzioni di verità rappresentate dai connettivi logici standard per la logica proposizionale classica sono definite come segue.

Definizione 2.13. [*Tavola di verità della negazione*]

φ	$\neg\varphi$
1	0
0	1

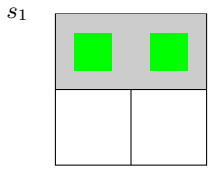
La negazione di una proposizione è vera se e solo se la proposizione negata è falsa. Notiamo che $\neg\varphi$ inverte il valore di verità di φ. Quindi la negazione della proposizione φ concerne la porzione di mondo data dalla sola prima cella. Le condizioni di verità della negazione consistono in questo stato di cose



Definizione 2.14. [*Tavola di verità della congiunzione*]

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

La congiunzione è vera se e solo se entrambi i congiunti sono veri. Osserviamo che $\varphi \wedge \psi$ assume il *più piccolo* (min) tra i valori assegnati ai congiunti[11]. Poiché le proposizioni φ e ψ riguardano la porzione di mondo data dalle prime due celle, le condizioni di verità della congiunzione consistono nel seguente stato di cose

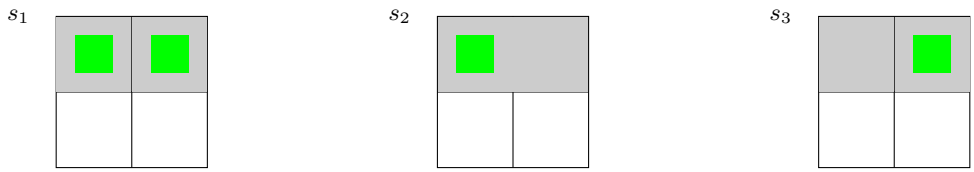


[11] Il concetto di "più piccolo" si riferisce all'*aritmetica dei valori di verità*. Dire che la congiunzione assume il "più piccolo" tra i valori dei congiunti significa che restituisce sempre il numero più basso tra quelli assegnati alle due proposizioni.

Definizione 2.15. [*Tavola di verità della disgiunzione*]

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

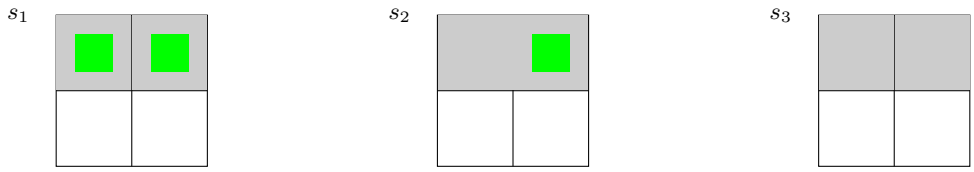
La disgiunzione è falsa se e solo se entrambi i disgiunti sono falsi. Osserviamo che $\varphi \vee \psi$ assume il *più grande* (max) tra i valori assegnati ai disgiunti. Le condizioni di verità della disgiunzione consistono in questi stati di cose



Definizione 2.16. [*Tavola di verità dell'implicazione*]

φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

L'implicazione è falsa se e solo se l'antecedente è vero e il conseguente è falso. Osserviamo che l'implicazione assume il valore 1 se e solo se il valore dell'antecedente è minore o uguale al valore del conseguente. Le condizioni di verità dell'implicazione consistono in questi stati di cose



Alla luce delle tavole di verità dei connettivi logici, del *Principio 2.7.* di composizionalità e dei *Principi 2.2-6.*, è possibile costruire una procedura che sfrutti le tavole di verità per calcolare il valore di verità di formule di complessità arbitraria.

Definizione 2.17. [*Procedura schematica per le tavole di verità*] Sia $\varphi \in Form_0$, scriveremo φ nella forma $\varphi(p_1, \ldots, p_n)$ per indicare che φ contiene esattamente le variabili $(p_1, \ldots, p_n)$.

– *Passo 1*.
Trascriviamo su una medesima riga tutte le variabili proposizionali $p_1, \ldots, p_n$, seguite dall'intera formula $\varphi(p_1, \ldots, p_n)$. Successivamente, creiamo una colonna per ogni variabile proposizionale e per il connettivo principale della formula.

– *Passo 2*.
In ogni colonna rappresentata dalla variabile p_i (per ogni $1 \leq i \leq n$) scriviamo le possibili occorrenze di 1 e 0.

– *Passo 3*.
Calcoliamo i valori di verità di tutte le sottoformule di $\varphi(p_1, \ldots, p_n)$, prestando attenzione nel dare priorità a quelle con complessità minore. I valori di verità della formula $\varphi(p_1, \ldots, p_n)$ sono quelli che compaiono nella colonna del connettivo principale.

Esempio 2.8. [*Principio di non contraddizione:* $\neg(\varphi \wedge \varphi)$]

φ	$\neg$	$(\varphi$	$\wedge$	$\neg$	$\varphi)$
1	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0

Esempio 2.9. [*Principio del terzo escluso:* $\varphi \vee \neg\varphi$]

φ	φ	$\vee$	$\neg$	φ
1	1	1	0	1
0	0	1	1	0

Esempio 2.10. [*Prima legge di contrapposizione:* $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$]

φ	ψ	$(\neg$	φ	$\to$	$\neg$	$\psi)$	$\to$	$(\psi$	$\to$	$\varphi)$
1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0

Esempio 2.11. [$\varphi \vee \neg(\psi \wedge \gamma)$]

φ	ψ	γ	φ	$\vee$	$\neg$	$(\psi$	$\wedge$	$\gamma)$
1	1	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	1	1	0	0	1
0	0	0	0	1	1	0	0	0

Esempio 2.12. [$\varphi \wedge \neg\varphi$]

φ	φ	$\wedge$	$\neg\varphi$
1	1	0	0
0	0	0	1

Esempio 2.13. ♠ [$((\varphi \wedge \psi) \vee (\gamma \wedge \delta)$]

φ	ψ	γ	δ	$(\varphi$	$\wedge$	$\psi)$	$\vee$	$(\gamma$	$\wedge$	$\delta)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Definizione 2.18. [*Tautologia, Soddisfacibile, Falsificabile, Contraddizione*] Una formula φ si dice

- *tautologia*, se nella colonna del connettivo principale nella tavola di verità di φ è presente solo 1;
- *soddisfacibile*, se nella colonna del connettivo principale nella tavola di verità di φ è presente almeno un 1;
- *falsificabile*, se nella colonna del connettivo principale nella tavola di verità di φ è presente almeno uno 0;
- *contraddizione*, se nella colonna del connettivo principale nella tavola di verità di φ è presente solo 0.

2.4 Modelli e valutazioni

Dati questi concetti semantici preliminari possiamo definire, in modo rigoroso, la verità di una proposizione per induzione sulla lunghezza delle proposizioni.

Definizione 2.19. [*Verità in un modello per $\mathcal{L}_0$*]

$$\begin{array}{lll} M \vDash p & \text{sse} & v(p) = 1 \\ M \vDash \neg\varphi & \text{sse} & M \nvDash \varphi \\ M \vDash (\varphi \wedge \psi) & \text{sse} & M \vDash \varphi \text{ e } M \vDash \psi \\ M \vDash (\varphi \vee \psi) & \text{sse} & M \vDash \varphi \text{ o } M \vDash \psi \\ M \vDash (\varphi \to \psi) & \text{sse} & M \nvDash \varphi \text{ o } M \vDash \psi \end{array}$$

Definizione 2.20. [*Valutazione Boolena v in $\mathcal{L}_0$*]

$$\begin{array}{lll} v(\neg\varphi) = 1 & \text{sse} & v(\varphi) = 0 \\ v(\varphi \wedge \psi) = 1 & \text{sse} & v(\varphi) = 1 \text{ e } v(\psi) = 1 \\ v(\varphi \vee \psi) = 1 & \text{sse} & v(\varphi) = 1 \text{ o } v(\psi) = 1 \\ v(\varphi \to \psi) = 1 & \text{sse} & v(\varphi) = 0 \text{ o } v(\psi) = 1 \end{array}$$

Osservazione 2.1. La nozione di valutazione Booleana può essere riformulata equivalentemente sull'aritmetica dei valori di verità come segue

- $v(\neg\varphi) = 1 - v(\varphi)$;
- $v(\varphi \wedge \psi) = \min(v(\varphi), v(\psi))$;
- $v(\varphi \vee \psi) = \max(v(\varphi), v(\psi))$;
- $v(\varphi \to \psi) = \max(1 - v(\varphi), v(\psi))$.

In altri termini, siano $x, y \in \{1, 0\}$

- $\neg x = 1$ sse $x = 0$;
- $x \wedge y = 1$ sse $\min(x, y) = 1 = x = y$;
- $x \vee y = 0$ sse $\max(x, y) = 0 = x = y$;
- $x \to y = 0$ sse $x = 1$ e $x = 0$.

Se Γ è un insieme di proposizioni di $\mathcal{L}_0$, allora

Definizione 2.21. [*Modello di un insieme di formule in $\mathcal{L}_0$*]

$$M \vDash \Gamma \quad \text{sse} \quad M \vDash \varphi, \text{ per ogni } \varphi \in \Gamma$$

Definizione 2.22. [*Valutazione di un insieme di formule in $\mathcal{L}_0$*]

$$v(\Gamma) = 1 \quad \text{sse} \quad v(\varphi) = 1, \text{ per ogni } \varphi \in \Gamma$$

Definiamo ora semanticamente i concetti di verità logica, conseguenza logica, soddisfacibilità, equivalenza logica, validità di un'inferenza, spazio logico di una proposizione e libro di un modello in $\mathcal{L}_0$.

Definizione 2.23. [*Verità logica in $\mathcal{L}_0$*]

$$\Vdash_{\mathbf{M}_0} \varphi \quad \text{sse} \quad \text{per ogni } M \in \mathbf{M}_0,\ M \vDash \varphi$$

ovvero

$$\Vdash_{\mathbf{M}_0} \varphi \quad \text{sse} \quad \text{per ogni } v,\ v(\varphi) = 1$$

$\varphi \in \mathcal{L}_0$ è una verità logica quando ogni modello verifica φ. In questo caso, φ è anche detta *logicamente valida* (tautologia).

Definizione 2.24. [*Conseguenza logica in $\mathcal{L}_0$*]

$$\Gamma \Vdash_{\mathbf{M}_0} \varphi \quad \text{sse} \quad \text{per ogni } M \in \mathbf{M}_0,\ \text{se } M \vDash \Gamma \text{ allora } M \vDash \varphi$$

ovvero

$$\Gamma \Vdash_{\mathbf{M}_0} \varphi \text{ se, per ogni valutazione } v,\ \text{se } v(\psi) = 1 \text{ per ogni } \psi \in \Gamma,\ \text{allora } v(\varphi) = 1$$

$\varphi \in \mathcal{L}_0$ è conseguenza logica di $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_0$ quando ogni modello di Γ verifica φ. Osserviamo, inoltre, che la relazione di conseguenza logica esprime la nozione di *inferenza valida* propria del ragionamento deduttivo: non è logicamente possibile che le premesse siano vere e la conclusione falsa.

Definizione 2.25. [*Validità di un'inferenza in $\mathcal{L}_0$*]

Un'inferenza in $\mathcal{L}_0$ è un'inferenza le cui premesse e la cui conclusione sono proposizioni in $\mathcal{L}_0$. Un'inferenza in $\mathcal{L}_0$ è valida se e solo se la sua conclusione è una conseguenza logica delle sue premesse. Per mostrare che un'inferenza è valida occorre stabilire che ogni modello delle assunzioni è un modello della conclusione, mentre per mostrare che un'inferenza è invalida è sufficiente stabilire che esiste un modello delle assunzioni che non verifica la conclusione. Un modello in $\mathbf{M}_0$ che verifica le assunzioni in Γ ma non verifica la conclusione è chiamato *contromodello* dell'inferenza. La costruzione di contromodelli sarà di fondamentale importanza nel calcolo dei *tableaux analitici*.

Definizione 2.26. [*Soddisfacibilità in $\mathcal{L}_0$*]

$$Sod_{\mathbf{M}_0}(\Gamma) \quad \text{sse} \quad \text{per qualche } M \in \mathbf{M}_0,\ M \vDash \Gamma$$

ovvero

$$Sod_{\mathbf{M}_0}(\Gamma) \quad \text{sse} \quad \text{esiste una } v, v(\Gamma) = 1$$

$\Gamma \subseteq \mathcal{L}_0$ è soddisfacibile quando qualche modello verifica Γ.

Definizione 2.27. [*Equivalenza logica in $\mathcal{L}_0$*]

$$\varphi \equiv_{\mathbf{M}_0} \psi \quad \text{sse} \quad (\psi \Vdash_{\mathbf{M}_0} \varphi \text{ e } \varphi \Vdash_{\mathbf{M}_0} \psi)$$

φ e ψ sono logicamente equivalenti quando sono conseguenza l'una dell'altra.

Definizione 2.28. [*Spazio logico di una proposizione in $\mathcal{L}_0$*]

Lo spazio logico di una formula $\varphi \in \mathcal{L}_0$ è la classe di modelli in cui la proposizione è vera: $M[\varphi] = \{M \in \mathbf{M}_0 | M \vDash \varphi\}$. Lo spazio logico di un insieme di formule $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_0$ è la classe di modelli in cui ogni formula dell'insieme è vera: $M[\Gamma] = \{M \in \mathbf{M}_0 | M \vDash \Gamma\}$. Lo spazio logico totale o complessivo è la classe $\mathbf{M}_0$ di tutti i modelli per $\mathcal{L}_0$. Naturalmente, lo spazio logico di una contraddizione è nullo $= \emptyset$: nessun modello verifica la contraddizione.

Definizione 2.29. [*Identità fondamentali*]

1. $M[\neg\varphi] = \mathbf{M}_0 - M[\varphi]$
2. $M[\varphi \wedge \psi] = M[\varphi] \cap M[\psi]$
3. $M[\varphi \vee \psi] = M[\varphi] \cup M[\psi]$
4. $M[\varphi \to \psi] = (\mathbf{M}_0 - M[\varphi]) \cup M[\psi]$

Dimostrazione. La dimostrazione segue direttamente dalla definizione di spazio logico e di verità di una proposizione

1. $M \in M[\neg\varphi]$ sse $M \vDash \neg\varphi$ sse $M \nvDash \varphi$ sse $M \notin M[\varphi]$
2. $M \in M[\varphi \wedge \psi]$ sse $M \vDash \varphi$ e $M \vDash \psi$ sse $M \in M[\varphi]$ e $M \in M[\psi]$
3. $M \in M[\varphi \vee \psi]$ sse $M \vDash \varphi$ o $M \vDash \psi$ sse $M \in M[\varphi]$ o $M \in M[\psi]$
4. $M \in M[\varphi \to \psi]$ sse $M \nvDash \varphi$ o $M \vDash \psi$ sse $M \notin M[\varphi]$ o $M \in M[\psi]$

□

Corollario 2.1. [*Inclusione ed equivalenza logica*]

(*i*) $\varphi \Vdash_{\mathbf{M}_0} \psi$ sse $M[\varphi] \subseteq M[\psi]$;
(*ii*) $\varphi \equiv_{\mathbf{M}_0} \psi$ sse $M[\varphi] = M[\psi]$.

Corollario 2.2. [*Verità logica, conseguenza logica, soddisfacibilità*]

(*i*) $\Vdash_{\mathbf{M}_0} \varphi$ sse $M[\varphi] = \mathbf{M}_0$;
(*ii*) $\Gamma \Vdash_{\mathbf{M}_0} \varphi$ sse $M[\Gamma] \subseteq M[\varphi]$;
(*iii*) $Sod_{\mathbf{M}_0}(\Gamma)$ sse $M[\Gamma] \neq \emptyset$;
(*iv*) $Sod_{\mathbf{M}_0}(\Gamma, \varphi)$ sse $M[\Gamma] \cap M[\varphi] \neq \emptyset$.

La connessione tra la relazione di conseguenza logica e quella di soddisfacibilità di insiemi di formule e formule, ci consente di concludere che una formula φ è

- conseguenza logica di Γ se e solo se $\neg\varphi$ non è soddisfacibile con Γ;
- soddisfacibile con Γ se e solo se $\neg\varphi$ non è conseguenza logica di Γ.

Definizione 2.30. [*Libro di un modello in* $\mathcal{L}_0$]

Il libro di un modello $M \in \mathbf{M}_0$ è l'insieme $\mathcal{L}_M = \{\varphi | M \vDash \varphi\}$ delle formule che sono vere in M. Quindi, per ogni $\varphi \in \mathcal{L}_0$, $M \vDash \varphi$ sse $\varphi \in \mathcal{L}_M$, da cui deriva che $M \vDash \mathcal{L}_M$: ogni modello verifica il proprio libro.

Il libro di un modello, essendo una descrizione completa del modello, esprime un concetto filosofico fondamentale: è il libro in cui è scritto tutto ciò che è vero nel modello dato:

> In linea di principio, la lettura del libro di un modello assicurerebbe la conoscenza completa del modello stesso. [...] I libri dei modelli di $\mathcal{L}_0$ costituiscono la biblioteca di $\mathcal{L}_0$. La biblioteca di $\mathcal{L}_0$ contiene le descrizioni di tutti i mondi possibili descrivibili in $\mathcal{L}_0$: è la biblioteca di tutti i libri che possono essere scritti in questo linguaggio. Tra questi libri c'è il libro che cerchiamo di consultare: il libro che descrive il mondo attuale. (Giordani 2016, pp. 147-148)

2.5 Tableaux analitici

Introduciamo ora il metodo dei tableaux per la logica proposizionale. Una delle tematiche logiche fondamentali consiste nell'individuare forme di ragionamento logicamente valide, la cui validità non dipenda dal contenuto delle singole proposizioni con cui il ragionamento è costruito, ma dallo schema formale sottostante. Mostreremo nel seguito un metodo di calcolo, detto dei *tableaux analitici*, che consente di determinare *algoritmicamente* tutte le verità logiche della logica proposizionale. Il metodo dei tableaux è dunque sia un metodo di decisione sia un sistema di prova. La nozione preliminare per poter definire un tableau è quella di *grafo*. Un grafo è un oggetto geometrico che dal punto di vista matematico può essere rappresentato in termini di *nodi* (o vertici) e *archi* (o spigoli) che li collegano. I grafi si possono usare in molti ambiti. Per esempio, i diagrammi di flusso rappresentano procedure algoritmiche, gli alberi genealogici mostrano le relazioni familiari e i diagrammi di Hasse illustrano strutture algebriche.

Definizione 2.31. [*Grafo*] Un grafo è una struttura geometrica astratta composta di nodi e di archi che li collegano. Matematicamente si può definire come una coppia ordinata $G = \langle N, A \rangle$, dove N è un insieme di nodi e A è un insieme di archi, cioè coppie di nodi.

Un grafo si dice connesso se per ogni coppia di nodi esiste un percorso di archi che li collega, ed è orientato se gli archi hanno una direzione, ovvero sono coppie ordinate. Un albero è un grafo connesso e non orientato in cui i percorsi che collegano, i nodi, non formano cicli. Un albero è etichettato quando i suoi nodi contengono un'informazione simbolica. Un albero radicato ha un nodo di partenza, chiamato radice, che

ne definisce l'orientamento, dalla radice verso i nodi più lontani. In tale struttura, un figlio è un nodo che segue un altro, detto genitore. Una foglia è un nodo terminale. Un ramo è un percorso che va dalla radice a una foglia, passando di genitore in figlio. Il livello di un nodo corrisponde a 1 più il livello del suo genitore, con la radice che ha livello 0. L'altezza di un albero è il massimo tra i livelli di tutti i suoi nodi. Infine, un albero binario è un albero radicato in cui ogni nodo ha un massimo di due figli.

I tableaux analitici, basati sulle proprietà matematiche dei grafi, sono un sistema formale di prova per le formule di un linguaggio logico e, al contempo, un metodo per la costruzione di modelli. Nel primo caso, i tableaux agiscono come una *procedura di refutazione*. Per dimostrare una formula φ, si parte dalla sua negazione, $\neg\varphi$. Si scompone sintatticamente $\neg\varphi$ alla ricerca di una contraddizione: se la si trova, allora $\neg\varphi$ è refutata e, di conseguenza, indimostrabile. Per il principio di bivalenza, se $\neg\varphi$ non può essere dimostrata, allora φ è dimostrata. Nel secondo caso, i tableaux servono come *procedura per la ricerca di contromodelli*. Anche in questo caso, si inizia dalla formula $\neg\varphi$, assumendo che esista un modello che la soddisfa. Si analizza semanticamente $\neg\varphi$, chiedendosi quali altre formule verrebbero soddisfatte o non soddisfatte in questo ipotetico modello. Se in almeno uno dei percorsi di analisi è possibile definire un modello, questo sarà un modello per $\neg\varphi$ e, di conseguenza, un contromodello per φ. Al contrario, se non è possibile costruire alcun modello per $\neg\varphi$ (cioè nessun contromodello per φ), ciò dimostra che φ è vera in tutti i modelli e, quindi, logicamente valida.

L'espressione "tableau semantico" fu introdotta da Beth nel 1955 per descrivere l'uso di alberi come procedura per la ricerca sistematica di controesempi. Nello stesso periodo, Jaakko Hintikka (1929-2015) stava sviluppando l'idea che la dimostrazione di una formula φ fosse, in sostanza, un tentativo sistematico di costruire un modello in cui la sua negazione, $\neg\varphi$, fosse vera. Se questo tentativo fallisce, allora φ deve essere valida. Hintikka ha reso esplicito come un modello possa essere ricavato dal modo in cui un tableau è costruito. Il metodo dei tableaux fu poi sistematizzato da Raymond Smullyan (1919-2017) nel 1968, il cui lavoro contribuì a renderli ampiamente noti e utilizzati. Anche noi, nel presentare i tableaux, adotteremo la notazione di Smullyan.

Nel metodo dei tableaux non si usano assiomi, ma solo una collezione di *regole*. Queste regole permettono di analizzare le formule di un linguaggio, esplicitandone le proprietà sintattiche e semantiche. Ogni volta che si applica una regola a una formula, si genera uno o più nodi in un albero. Questo albero rappresenta l'analisi completa della formula. Vediamo quali sono le regole di trasformazione dei tableaux nella notazione per formule di Smullyan.

Regole dei Tableaux Analitici

– *Regola della doppia negazione*

$$\begin{array}{c} \neg\neg\varphi \\ | \\ \varphi \end{array}$$

– *Regole della congiunzione e della negazione della congiunzione*

$$\begin{array}{c} \varphi \wedge \psi \\ | \\ \varphi \\ | \\ \psi \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & \neg(\varphi \wedge \psi) & \\ / & & \backslash \\ \neg\varphi & & \neg\psi \end{array}$$

– *Regole della disgiunzione e della negazione della disgiunzione*

$$\begin{array}{ccc} & \varphi \vee \psi & \\ / & & \backslash \\ \varphi & & \psi \end{array} \qquad \begin{array}{c} \neg(\varphi \vee \psi) \\ | \\ \neg\varphi \\ | \\ \neg\psi \end{array}$$

– *Regole del condizionale e della negazione del condizionale*

$$\begin{array}{ccc} & \varphi \rightarrow \psi & \\ / & & \backslash \\ \neg\varphi & & \psi \end{array} \qquad \begin{array}{c} \neg(\varphi \rightarrow \psi) \\ | \\ \varphi \\ | \\ \neg\psi \end{array}$$

Come evidenziato da Smullyan, le regole per il calcolo proposizionale possono essere *congiuntive* o *disgiuntive*. Le prime analizzano le proprietà semantiche di una formula in una sola direzione, mentre le seconde introducono due possibili alternative. Smullyan ha categorizzato le formule a cui si applicano le regole congiuntive come formule

di tipo α e quelle cui si applicano le regole disgiuntive come formule di tipo β. Utilizzando α e β come metavariabili rispettivamente per i due tipi di formule, per la logica proposizionale avremo due soli schemi di regole

$$\frac{\alpha}{\alpha_1, \alpha_2} \qquad \frac{\beta}{\beta_1 | \beta_2}$$

In questo modo, possiamo schematicamente riassumere le regole nel seguente modo

Regole dei Tableaux Analitici (notazione a sequenti)

– *Regole di tipo α (congiuntive)*

$$\frac{\neg\neg\varphi}{\varphi}\,\neg\neg \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi, \psi}\,\wedge \qquad \frac{\neg(\varphi \vee \psi)}{\neg\varphi, \neg\psi}\,\neg\vee \qquad \frac{\neg(\varphi \to \psi)}{\varphi, \neg\psi}\,\neg\to$$

– *Regole di tipo β (disgiuntive)*

$$\frac{\neg(\varphi \wedge \psi)}{\neg\varphi | \neg\psi}\,\neg\wedge \qquad \frac{\varphi \vee \psi}{\varphi | \psi}\,\vee \qquad \frac{\varphi \to \psi}{\neg\varphi | \psi}\,\to$$

Le regole dei tableaux hanno una proprietà fondamentale: l'applicazione a una formula produce come risultato formule che sono sue *sottoformule*. Le regole che possiedono questa proprietà sono dette *analitiche* e tali sono anche i sistemi di prova che se ne avvalgono. Al contrario, una prova è definita *sintetica* quando il contenuto di una formula è costruito a partire da altre formule, considerate vere, tramite regole di trasformazione che conservano la verità dalle premesse alle conclusioni. Il processo analitico offre un notevole vantaggio computazionale: poiché ogni regola scompone una formula in componenti di complessità minore, il processo di costruzione di una prova analitica è intrinsecamente finito. Pertanto, con un numero limitato di applicazioni di queste regole, è sempre possibile decidere se una data formula abbia o meno una dimostrazione. In tal senso, il sistema dei tableaux agisce come un metodo di decisione (o, in casi più complessi, di *semidecisione*). L'applicazione di queste regole a una formula genera la caratteristica struttura ad albero dei tableaux. Sarà proprio attraverso la definizione di questa struttura che potremo formalizzare il concetto di prova formale all'interno del sistema dei tableaux.

Definizione 2.32. [*Albero di Beth $\mathcal{T}$*] Un albero di Beth $\mathcal{T}$ – detto anche tableau analitico o semantico – è un albero radicato binario in cui ogni nodo è etichettato con una o più formule. Un ramo $\mathcal{R}$ di $\mathcal{T}$ si dice *chiuso* se, per qualche formula φ, contiene sia φ che $\neg\varphi$ (e lo indicheremo con il simbolo $\times$). Un ramo si dice *aperto* se non è chiuso (e lo indicheremo con il simbolo $\odot$). $\mathcal{T}$ si dice *chiuso* se tutti i suoi rami sono chiusi.

Descriviamo ora in modo più formale una procedura per costruire un tableau per le formule del linguaggio proposizionale mediante l'applicazione delle regole di inferenza del calcolo.

Definizione 2.33. [*Costruzione tableau*] Dato un insieme di formule Γ di $\mathcal{L}_0$, la costruzione di un tableau $\mathcal{T}$ per Γ si articola secondo i seguenti passi procedurali:

(0) Porre $\neg\Gamma$ alla radice dell'albero $\mathcal{T}$.

$(n+1)$ Per ogni ramo $\mathcal{R}$ dell'albero e per ogni nodo n di $\mathcal{R}$
- se n contiene α, estendere $\mathcal{R}$ in un ramo $\mathcal{R} \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$;
- se n contiene β, estendere $\mathcal{R}$ in due rami $\mathcal{R} \cup \{\beta_1\}$ e $R \cup \{\beta_2\}$.

Se Γ è finito, la procedura termina sempre.

Definizione 2.34. [*Ramo e alberi terminati*] Un ramo si dice terminato quando non è più possibile estenderlo. Un albero si dice *terminato* se tutti i suoi rami sono terminati.

Un tableau si dice *terminato* quando non è più possibile applicare alcuna delle regole del sistema di prova alle formule che etichettano i suoi nodi.

Definizione 2.35. [Ramo chiuso] Un ramo si dice *chiuso* se, per qualche formula φ, contiene sia φ che la sua negazione $\neg\varphi$.

Un ramo $\mathcal{R}$ si definisce *chiuso* quando contiene una contraddizione. Se nel costruire $\mathcal{T}$ per una formula φ tutti i suoi rami risultano chiusi, significa che ogni tentativo di trovare un modello che soddisfi φ fallisce. In questo caso, diciamo che la formula è *refutata*, il che dimostra che φ è *insoddisfacibile*. Per il principio di bivalenza, se una formula è insoddisfacibile, la sua negazione $\neg\varphi$ deve essere valida in tutti i modelli. Pertanto, un albero di Beth completamente chiuso per φ funge da *prova formale* della validità di $\neg\varphi$, fornendo una definizione di prova formale in termini di procedura di refutazione.

Definizione 2.35. [$\vdash_{\mathbf{M}_0} \varphi$)] Una prova per una formula φ di un linguaggio logico $\mathcal{L}_0$ è un albero di Beth $\mathcal{T}$ per $\neg\varphi$ in cui tutti i rami sono chiusi.

La dimostrazione di una formula φ consiste nell'applicare le regole di trasformazione per *derivare* una contraddizione dalla sua negazione $\neg\varphi$. Analizzando il contenuto di $\neg\varphi$, se si trova una contraddizione, si deduce che non esiste alcun modello in cui $\neg\varphi$ è vera. Questo implica, per le condizioni di verità della negazione, che non esiste alcun modello in cui la formula φ sia falsa. In questo senso, la formula è considerata dimostrata, poiché non è possibile costruire alcun contromodello per φ utilizzando le regole di trasformazione che analizzano il contenuto di $\neg\varphi$ per rilevare una contraddizione.

Negli esempi che seguono, i tableaux saranno impiegati come procedura per *la ricerca di contromodelli*. Per dimostrare che una formula φ è una verità logica (o una tautologia), porremo alla radice dell'albero la formula $\neg\varphi$. Facendo ciò, assumiamo che esista un modello per $\neg\varphi$, ossia che $Sod_{\mathbf{M}_0}(\neg\varphi)$ e quindi che φ non è valida. Se l'albero risulta chiuso, ciò significherà che non è possibile costruire alcun modello per $\neg\varphi$, ovvero che $M[\neg\varphi] = \emptyset$. Ma dire che la classe dei modelli per $\neg\varphi$ è vuota equivale a dire che non esiste un contromodello per φ e, pertanto, φ è logicamente valida.

Corollario 2.3. [*Soddisfacibilità di una formula*]

- $Sod_{\mathbf{M}_0}(\varphi)$ sse $M[\varphi] \neq \emptyset$
- $\neg Sod_{\mathbf{M}_0}(\varphi)$ sse $M[\varphi] = \emptyset$

Se $\neg\varphi$ non è soddisfacibile, allora φ sarà vera (soddisfacibile) in tutti i modelli, ovvero logicamente valida (tautologia) e, dunque, una verità logica come formalmente definito nel *Corollario 2.2.(i)*

$$\Vdash_{\mathbf{M}_0} \varphi \quad \text{sse} \quad M[\varphi] = \mathbf{M}_0$$

Diamo ora alcuni esempi di verifica della validità di una formula usando i tableaux analitici.

Esempio 2.14. [*Principio di non contraddizione*]

Dimostrazione.

$$\nVdash \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$$

1.	$\neg\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$	Formula negata
2.	$\varphi \wedge \neg\varphi$	$(\neg\neg)$ da (1)
3.	φ	$(\wedge)$ da (2)
4.	$\neg\varphi\times$	$(\wedge)$ da (2)

□

Analizziamo analiticamente tutti i nodi dell'albero

- livello (1): la radice è la negazione della formula che vogliamo dimostrare;
- livello (2): il nodo $\varphi \wedge \neg\varphi$ è ottenuto applicando la regola $(\neg\neg)$ al livello (1);
- livello (3): il nodo φ è ottenuto applicando la regola $(\wedge)$ al livello (2);
- livello (4): il nodo $\neg\varphi$ è ottenuto applicando la regola $(\wedge)$ al livello (2).

Il ramo termina con la foglia $\neg\varphi$ al livello (4) ed è chiuso perché contiene φ al livello (3) e $\neg\varphi$ al livello (4) e lo indichiamo con $\times$. Poiché non è possibile costruire un contromodello, possiamo concludere che la formula è logicamente valida: $\Vdash \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$.

Esempio 2.15. [*Principio del terzo escluso*]

Dimostrazione.

$$\nVdash \varphi \vee \neg\varphi$$

1.	$\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$	Formula negata
2.	$\neg\varphi$	$(\neg\vee)$ da (1)
3.	$\neg\neg\varphi$	$(\neg\vee)$ da (1)
4.	$\varphi\times$	$(\neg\neg)$ da (3)

□

Analizziamo analiticamente tutti i nodi dell'albero

- Livello (1): la radice è la negazione della formula che vogliamo dimostrare;
- Livello (2): il nodo $\neg\varphi$ è ottenuto applicando la regola $(\neg\vee)$ al livello (1);
- Livello (3): il nodo $\neg\neg\varphi$ è ottenuto applicando la regola $(\neg\vee)$ al livello (1);
- Livello (4): il nodo φ è ottenuto applicando la regola $(\neg\neg)$ al livello (3);

Il ramo termina con la foglia φ al livello (4) ed è chiuso perché contiene $\neg\varphi$ al livello (3) e φ al livello (4). Poiché non è possibile costruire un contromodello, possiamo concludere che la formula è logicamente valida: $\Vdash \varphi \vee \neg\varphi$.

Esempio 2.16. [*Prima legge dello Pseudo Scoto*]

Dimostrazione.

$$\nVdash \varphi \wedge \neg\varphi \to \psi$$

1.	$\neg(\varphi \wedge \neg\varphi \to \psi)$	Formula negata
2.	$\varphi \wedge \neg\varphi$	$(\neg \to)$ da (1)
3.	$\neg\psi$	$(\neg \to)$ da (1)
4.	φ	$(\wedge)$ da (2)
5.	$\neg\varphi\times$	$(\wedge)$ da (2)

□

Analizziamo analiticamente tutti i nodi dell'albero

- Livello (1): la radice è la negazione della formula che vogliamo dimostrare;
- Livello (2): il nodo $\varphi \wedge \neg\varphi$ è ottenuto applicando la regola $(\neg \to)$ al livello (1);
- Livello (3): il nodo $\neg\psi$ è ottenuto applicando la regola $(\neg \to)$ al livello (1);
- Livello (4): il nodo φ è ottenuto applicando la regola $\wedge$ al livello (2);
- Livello (5): il nodo $\neg\varphi$ è ottenuto applicando la regola $\wedge$ al livello (2).

Il ramo termina con la foglia $\neg\varphi$ al livello (5) ed è chiuso perché contiene φ al livello (4) e $\neg\varphi$ al livello (5). Poiché non è possibile costruire un contromodello, possiamo concludere che la formula è logicamente valida: $\Vdash \varphi \wedge \neg\varphi \to \psi$.

Esempio 2.17. [*Prima legge di contrapposizione*]

Dimostrazione.

$$\nVdash (\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$$

1.	$\neg((\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$	Formula negata
2.	$\neg\varphi \to \neg\psi$	$(\neg \to)$ da (1)
3.	$\neg(\psi \to \varphi)$	$(\neg \to)$ da (1)
4.	ψ	$(\neg \to)$ da (3)
5.	$\neg\varphi$	$(\neg \to)$ da (3)
6.	$\neg\neg\varphi \qquad \neg\psi\times$	$(\to)$ da (2)
7.	$\varphi\times$	$(\neg\neg)$ da (6)

□

Analizziamo analiticamente tutti i nodi dell'albero

- Livello (1): la radice è la negazione della formula che vogliamo dimostrare;
- Livello (2): il nodo $\neg\varphi \to \neg\psi$ è ottenuto applicando la regola $(\neg \to)$ al livello (1);
- Livello (3): il nodo $\neg(\psi \to \varphi)$ è ottenuto applicando la regola $(\neg \to)$ al livello (1);
- Livello (4): il nodo ψ è ottenuto applicando la regola $(\neg \to)$ al livello (3);
- Livello (5): il nodo $\neg\varphi$ è ottenuto applicando la regola $(\neg \to)$ al livello (3);
- Livello (6): i nodi $\neg\neg\varphi$ e $\neg\psi$ sono ottenuti applicando la regola $(\to)$ al livello (2);
- Livello (7): il nodo φ è ottenuto applicando la regola $(\neg\neg)$ al livello (6).

Il ramo che termina con la foglia $\neg\psi$ al livello (6) è chiuso perché contiene ψ al livello (4) e $\neg\psi$ al livello (6). Il ramo che termina con la foglia φ al livello (7) è chiuso perché contiene $\neg\varphi$ al livello (5) e φ al livello (7). Poiché non è possibile costruire un contromodello, possiamo concludere che la formula è logicamente valida: $\Vdash (\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$.

Le regole del calcolo dei tableaux non sono deterministiche: dicono cosa si può fare, non cosa si deve fare ad ogni passaggio. Questo implica che, per una stessa formula, è possibile costruire tableaux differenti. Nell'*Esempio 2.17.*, avremmo potuto analizzare, al livello (4), prima la formula del livello (2) e successivamente quella del livello (3). Sebbene nel calcolo proposizionale non sia necessario seguire un ordine preciso nell'applicazione delle regole, è consigliabile analizzare prima le formule di tipo α e poi quelle di tipo β. Nonostante l'approccio non deterministico, il risultato finale è sempre univoco: se la formula di partenza è una contraddizione, il tableau risulterà sempre chiuso; in tutti gli altri casi, si otterrà un tableau aperto. Il calcolo dei tableaux resta comunque un metodo di decisione per la logica proposizionale.

Nel prossimo esempio dimostriamo un bicondizionale sfruttando la *Convenzione 2.1.*:

$$\varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$$

Esempio 2.18. ♠ [*Prima legge di De Morgan*]

Dimostrazione.

$$\nVdash ((\varphi \wedge \psi \to \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)) \wedge (\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \varphi \wedge \psi)$$

1.	$\neg(((\varphi \wedge \psi \to \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)) \wedge (\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \varphi \wedge \psi)$		Formula negata
2.	$\neg((\varphi \wedge \psi \to \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$	$\neg(\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \varphi \wedge \psi)$	$(\neg\wedge)$ da (1)
3.	$\varphi \wedge \psi$	$\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$	$(\neg \to)$ da (2); $(\neg \to)$ da (2)
4.	$\neg\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$	$\neg(\varphi \wedge \psi)$	$(\neg \to)$ da (2); $(\neg \to)$ da (2)
5.	$\neg\varphi \vee \neg\psi$	$\neg\neg\varphi$	$(\neg\neg)$ da (4); $(\neg\vee)$ da (3)
6.	φ	$\neg\neg\psi$	$(\wedge)$ da (3); $(\neg\vee)$ da (3)
7.	ψ	φ	$(\wedge)$ da (3); $(\neg\neg)$ da (5)
8.	$\neg\varphi\times$ $\quad$ $\neg\psi\times$	ψ	$(\vee)$ da (5); $(\neg\neg)$ da (6)
9.		$\neg\varphi\times$ $\quad$ $\neg\psi\times$	$(\neg\wedge)$ da (4)

$\square$

Analizziamo analiticamente tutti i nodi dell'albero

- Livello (1): la radice è la negazione della formula che vogliamo dimostrare;
- Livello (2): i nodi $\neg((\varphi \wedge \psi \to \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$ e $\neg(\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \varphi \wedge \psi)$ sono ottenuti applicando la regola $(\neg\wedge)$ al livello (1);
- Livello (3): i nodi $\varphi \wedge \psi$ e $\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$ sono ottenuti applicando la regola $(\neg \to)$ al livello (2);
- Livello (4): i nodi $\neg\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$ e $\neg(\varphi \wedge \psi)$ sono ottenuti applicando la regola $(\neg \to)$ al livello (2);
- Livello (5): il nodo $\neg\varphi \vee \psi$ è ottenuto applicando la regola $\neg\neg$ al livello (4); mentre il nodo $\neg\neg\varphi$ è ottenuto applicando la regola $\neg\vee$ al livello (3);
- Livello (6): il nodo φ è ottenuto applicando la regola $\wedge$ al livello (3); mentre il nodo $\neg\neg\psi$ è ottenuto applicando la regola $\neg\vee$ al livello (3)
- Livello (7): il nodo ψ è ottenuto applicando la regola $\wedge$ al livello (3); mentre il nodo φ è ottenuto applicando la regola $\neg\neg$ al livello (5);
- Livello (8): i nodi $\neg\varphi$ e $\neg\psi$ sono ottenuti applicando la regola $\vee$ al livello (5); mentre il nodo ψ è ottenuto applicando la regola $\neg\neg$ al livello (6);
- Livello (9): i nodi $\neg\varphi$ e $\neg\psi$ sono ottenuti applicando la regola $(\neg\wedge)$ al livello (4).

Il ramo che termina con le foglie $\neg\varphi$ e $\neg\psi$ al livello (8) è chiuso perché contiene φ al livello (6) e $\neg\varphi$ al livello (8), e ψ al livello (7) e $\neg\psi$ al livello (8). Il ramo che termina con le foglie $\neg\varphi$ e $\neg\psi$ al livello (9) è chiuso perché contiene φ al livello (7) e $\neg\varphi$ al livello (9), e ψ al livello (8) e $\neg\psi$ al livello (9). Poiché non è possibile costruire un contromodello, possiamo concludere che la formula è logicamente valida: $\Vdash ((\varphi \wedge \psi \to \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)) \wedge (\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \varphi \wedge \psi)$.

Consideriamo adesso due esempi di tableaux per formule non dimostrabili.

Esempio 2.19. [$\Vdash ((\varphi \to \psi) \to \psi) \to \psi)$]

Dimostrazione.

$$\nVdash ((\varphi \to \psi) \to \psi) \to \psi)$$

1.	$\neg(((\varphi \to \psi) \to \psi) \to \psi)$	Formula negata
2.	$(\varphi \to \psi) \to \psi)$	$(\neg \to)$ da (1)
3.	$\neg\psi$	$(\neg \to)$ da (1)
4.	$\neg(\varphi \to \psi)$ $\quad$ $\psi\times$	$(\to)$ da (2)
5.	φ	$(\neg \to)$ da (4)
6.	$\neg\psi\odot$	$(\neg \to)$ da (4)

□

Analizziamo analiticamente tutti i nodi dell'albero

- Livello (1): la radice è la negazione della formula che vogliamo dimostrare;
- Livello (2): il nodo $(\varphi \to \psi) \to \psi)$ è ottenuto applicando la regola $(\neg \to)$ al livello (1);
- Livello (3): il nodo $\neg\psi$ è ottenuto applicando la regola $(\neg \to)$ al livello (1);
- Livello (4): i nodi $\neg(\varphi \to \psi)$ e ψ sono ottenuti applicando la regola $(\to)$ al livello (2);
- Livello (5): il nodo φ è ottenuto applicando la regola $(\neg \to)$ al livello (4);
- Livello (6): il nodo $\neg\psi$ è ottenuto applicando la regola $(\neg \to)$ al livello (4).

Il ramo che termina con la foglia ψ al livello (4) è chiuso perché contiene $\neg\psi$ al livello (3) e ψ al livello (4). Al contrario, il ramo che termina con la foglia $\neg\psi$ al livello (7) non è chiuso perché non contiene contraddizioni e non è possibile applicare altre regole: è un ramo terminato aperto e lo indichiamo con il simbolo $\odot$. Pertanto, è possibile costruire un contromodello e, dunque, la formula non è logicamente valida: $\nVdash ((\varphi \to \psi) \to \psi) \to \psi)$.

Esempio 2.20. ♠ [$\Vdash (\varphi \to \psi) \to ((\neg\varphi \to \neg\psi) \to \neg\psi)$]

Dimostrazione.

$$\nVdash (\varphi \to \psi) \to ((\neg\varphi \to \neg\psi) \to \neg\psi)$$

1.	$\neg((\varphi \to \psi) \to ((\neg\varphi \to \neg\psi) \to \neg\psi)$	Formula negata
2.	$\varphi \to \psi$	$(\neg \to)$ da (1)
3.	$\neg((\neg\varphi \to \neg\psi) \to \neg\psi)$	$(\neg \to)$ da (1)
4.	$\neg\varphi \to \neg\psi$	$(\neg \to)$ da (3)
5.	$\neg\neg\psi$	$(\neg \to)$ da (3)
6.	ψ	$\neg\neg)$ da (5)
7.	$\neg\neg\varphi$ $\quad$ $\neg\psi\times$	$(\to)$ da (4)
8.	φ	$(\neg\neg)$ da (7)
9.	$\neg\varphi\times$ $\quad$ $\psi\odot$	$(\to)$ da (2)

□

Analizziamo analiticamente tutti i nodi dell'albero

- Livello (1): la radice è la negazione della formula che vogliamo dimostrare;
- Livello (2): il nodo $(\varphi \to \psi)$ è ottenuto applicando la regola $(\neg \to)$ al livello (1);
- Livello (3): il nodo $\neg((\neg\varphi \to \neg\psi) \to \neg\psi)$ è ottenuto applicando la regola $(\neg \to)$ al livello (1);
- Livello (4): il nodo $\neg\varphi \to \neg\psi$ è ottenuto applicando la regola $(\neg \to)$ al livello (3);
- Livello (5): il nodo $\neg\neg\psi$ è ottenuto applicando la regola $(\neg \to)$ al livello (3);
- Livello (6): il nodo ψ è ottenuto applicando la regola $(\neg\neg)$ al livello (5);
- Livello (7): i nodi $\neg\neg\varphi$ e $\neg\psi$ sono ottenuti applicando la regola $(\to)$ al livello (4);
- Livello (8): il nodo φ è ottenuto applicando la regola $(\neg\neg)$ al livello (7);
- Livello (9): i nodi $\neg\varphi$ e ψ sono ottenuti applicando la regola $(\to)$ al livello (2).

Il ramo che termina con la foglia $\neg\psi$ al livello (7) è chiuso perché contiene ψ al livello (6) e $\neg\psi$ al livello (7). Al contrario, il ramo che termina con le foglie $\neg\varphi$ e $\neg\psi$ al livello (9) non è chiuso perché la foglia ψ non è in contraddizione con altre foglie e non è possibile applicare altre regole. Pertanto, è possibile costruire un contromodello e, dunque, la formula non è logicamente valida: $\nVdash (\varphi \to \psi) \to ((\neg\varphi \to \neg\psi) \to \neg\psi)$.

Gli alberi descritti finora hanno tutti una sola formula alla radice, ma questa limitazione è facilmente superabile. È sufficiente considerare alberi che abbiano come radice un insieme di formule. La procedura di costruzione di un albero semantico per un insieme di formule è identica a quella per una singola formula: si applicano semplicemente le regole del calcolo a tutte le formule dell'insieme. Questa generalizzazione ci permette di estendere il metodo dei tableaux all'analisi della relazione di conseguenza logica.

Supponiamo di voler verificare che Δ sia conseguenza logica di Γ nel sistema dei tableaux. Per farlo costruiamo un albero per l'insieme di formule $\Gamma \cup \neg[\Delta]$ (dove $\neg[\Delta] = \{\neg\varphi \mid \varphi \in \Delta\}$). È importante sottolineare l'intuizione semantica che giustifi-

ca questa procedura. Abbiamo visto nella *Definizione 2.24.* che $\varphi \in \mathcal{L}_0$ è conseguenza logica di $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_0$ quando ogni modello di Γ verifica φ:

$$\Gamma \Vdash_{\mathbf{M}_0} \varphi \quad \text{sse} \quad \text{per ogni } M \in \mathbf{M}_0, \text{ se } M \vDash \Gamma \text{ allora } M \vDash \varphi$$

e nella *definizione 2.26.* che $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_0$ è soddisfacibile quando qualche modello verifica Γ.

$$Sod_{\mathbf{M}_0}(\Gamma) \quad \text{sse} \quad \text{per qualche } M \in \mathbf{M}_0,\ M \vDash \Gamma.$$

Da queste definizioni segue il seguente teorema

Teorema 2.1. $\Gamma \Vdash \varphi$ sse $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ è insoddisfacibile.

Analizziamo più a fondo il teorema soffermandoci sulla sua contrapposta. Se l'insieme di formule $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ è soddisfacibile, allora possiamo affermare che $\Gamma \nVdash \varphi$. Il modello per $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$, cioè il modello che soddisfa Γ e non soddisfa φ, è un *contromodello* per $\Gamma \vDash \varphi$. Ma l'esistenza di contromodello invalida la necessaria relazione tra premesse e conclusioni che sta a fondamento della conseguenza logica, e ben espressa nella *Definizione 2.25.*

Da queste considerazioni si comprende come le nozioni di coerenza e soddisfacibilità siano legate.

Definizione 2.37. [*Coerenza*] Un insieme di formule Γ è coerente se non si dà il caso che per qualche formula φ, si abbia sia $\Gamma \vDash \varphi$ che $\Gamma \vDash \neg\varphi$.

Teorema 2.2. Un insieme di formule Γ è soddisfacibile se e solo se è coerente.

Pertanto, dato il *Teorema 2.2.* un insieme non è soddisfacibile se è incoerente. I tableaux ci consentono di verificare esattamente se un insieme di formule è coerente. Nel caso vogliamo verificare la validità di una conseguenza logica $\Gamma \Vdash \varphi$, costruiremo un tableau per l'insieme $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$: se otteniamo un tableau chiuso, avremo stabilito che $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ è incoerente e, quindi, che effettivamente φ è conseguenza logica di Γ. Questa intuizione semantica troverà piena giustificazione non appena avremo dimostrato la correttezza e la completezza dei tableaux analitici.

Esempio 2.21. [$\varphi \vee \psi \Vdash \neg\varphi \to \psi$]

Dimostrazione.

$$\varphi \vee \psi \nVdash \neg\varphi \to \psi$$

1.	$\varphi \vee \psi$	Premessa
2.	$\neg(\neg\varphi \to \psi)$	Conclusione negata
3.	$\neg\varphi$	$(\neg \to)$ da (2)
4.	$\neg\psi$	$(\neg \to)$ da (2)
5.	$\varphi\times$ $\quad$ $\psi\times$	$(\vee)$ da (1)

□

Essendo tutti i rami chiusi, $\{\varphi \vee \psi\} \cup \{\neg(\neg\varphi \to \psi)\}$ è incoerente.

Esempio 2.22. ♠ $[\varphi \vee \gamma, \varphi \to \psi, \gamma \to \delta \Vdash \psi \vee \delta]$

Dimostrazione.

$$\varphi \vee \gamma, \varphi \to \psi, \gamma \to \delta \nVdash \psi \vee \delta$$

1.	$\varphi \vee \gamma$	Premessa
2.	$\varphi \to \psi$	Premessa
3.	$\gamma \to \delta$	Premessa
4.	$\neg(\psi \vee \delta)$	Conclusione negata
5.	$\neg\psi$	$(\neg\vee)$ da (4)
6.	$\neg\delta$	$(\neg\vee)$ da (4)
7.	$\varphi \qquad \gamma$	$(\neg\vee)$ da (1)
8.	$\neg\varphi\times \qquad \psi\times \qquad \neg\varphi \qquad \psi\times$	$(\to)$ da (2)
9.	$\neg\gamma\times \qquad \delta\times$	$(\to)$ da (3)

□

Essendo tutti i rami chiusi, $\{\varphi \vee \gamma, \varphi \to \psi, \gamma \to \delta\} \cup \{\neg(\psi \vee \delta)\}$ è incoerente.

Esempio 2.23. ♠ Verificare la formula $\varphi \to (\psi \to \gamma), \varphi \to \neg\psi \Vdash \varphi \to \gamma$

Dimostrazione.

$$\varphi \to (\psi \to \gamma), \varphi \to \neg\psi \nVdash \varphi \to \gamma$$

1.	$\varphi \to (\psi \to \gamma)$	Premessa
2.	$\varphi \to \neg\psi$	Premessa
3.	$\neg(\varphi \to \gamma)$	Conclusione negata
4.	φ	$(\neg \to)$ da (3)
5.	$\neg\gamma$	$(\neg \to)$ da (3)
6.	$\neg\varphi\times \qquad \psi \to \gamma$	$(\to)$ da (1)
7.	$\neg\varphi\times \qquad \neg\psi$	$(\to)$ da (2)
8.	$\neg\psi\odot \qquad \gamma\times$	$(\to)$ da (6)

□

Non essendo tutti i rami chiusi, $\{\varphi \to (\psi \to \gamma), \varphi \to \neg\psi\} \cup \{\neg(\varphi \to \gamma)\}$ è coerente.

2.6 Insiemi di Hintikka

Nel definire che cosa si intenda per modello di un insieme di formule, ci siamo basati sulla nozione di valutazione booleana, illustrandone le proprietà fondamentali: un modello per un insieme di formule è una valutazione che le soddisfa tutte, ovvero le rende simultaneamente vere.

Supponiamo di avere un insieme Θ di formule del linguaggio proposizionale $\mathcal{L}_0$ e di volerci chiedere se tale insieme ammetta almeno una valutazione che lo soddisfi. Quali condizioni deve soddisfare Θ affinché esista un modello che lo renda vero? A questa domanda ha fornito una risposta precisa il logico e filosofo finlandese Jaakko Hintikka (1929-2015).

Secondo Hintikka, analizzando le proprietà strutturali di una valutazione booleana, possiamo individuare una serie di condizioni che l'insieme Θ deve rispettare

(H.a) Per ogni $\varphi \in Var_0$, se $\neg\varphi \in \Theta$ allora $\varphi \notin \Theta$;
(H.b) Per ogni $\varphi, \psi \in Form_0$, se $\varphi \wedge \psi \in \Theta$ allora $\varphi \in \Theta$ e $\psi \in \Theta$;
(H.c) Per ogni $\varphi, \psi \in Form_0$, se $\varphi \vee \psi \in \Theta$ allora $\varphi \in \Theta$ o $\psi \in \Theta$;
(H.d) Per ogni $\varphi, \psi \in Form_0$, se $\varphi \to \psi \in \Theta$ allora $\varphi \notin \Theta$ o $\psi \in \Theta$;
(H.a′) Per ogni $\varphi \in Var_0$, se $\varphi \notin \Theta$ allora $\neg\varphi \in \Theta$;
(H.b′) Per ogni $\varphi, \psi \in Form_0$, se $\varphi \in \Theta$ e $\psi \in \Theta$ allora $\varphi \wedge \psi \in \Theta$;
(H.c′) Per ogni $\varphi, \psi \in Form_0$, se $\varphi \in \Theta$ o $\psi \in \Theta$ allora $\varphi \vee \psi \in \Theta$;
(H.d′) Per ogni $\varphi, \psi \in Form_0$, se $\varphi \notin \Theta$ o $\psi \in \Theta$ allora $\varphi \to \psi \in \Theta$.

Hintikka ha dimostrato che le sole condizioni (H.a), (H.b), (H.c) e (H.d) sono sufficienti affinché un insieme Θ di formule possa avere un modello.

Definizione 2.38. [*Insieme di Hintikka*] Un insieme di Hintikka è un insieme di formule che rispetta le condizioni (H.a), (H.b), (H.c), (H.d).

Lemma 2.1. [*Lemma di Hintikka*] Un insieme di Hintikka è soddisfacibile.

Dimostrazione. Sia $\Gamma \subseteq Form_0$ un insieme di Hintikka. Definiamo una valutazione e dimostriamo che essa è effettivamente un modello di Γ. Poiché l'insieme Γ potrebbe essere infinito, la dimostrazione si serve del principio di induzione applicato al grado di complessità delle formule in Γ.
Sia v una valutazione booleana tale che, per ogni $\varphi \in Var_0$, si ha

$$v(\varphi) = 1 \quad \text{sse} \quad \varphi \in \Gamma$$

Mostriamo che $v(\Gamma) = 1$ per induzione sul grado di complessità delle formule $\varphi \in \Gamma$.

Base induttiva:

Se $\varphi \in \Gamma$ e $\varphi \in Var_0$, allora $v(\varphi) = 1$ per definizione di v.

Passo induttivo:

Assumiamo che la proprietà valga per formule di complessità inferiore e dimostriamola per i connettivi logici principali

(a) Se $\neg\varphi \in \Gamma$, allora $\varphi \notin \Gamma$ per la condizione $(\mathrm{H.a})$. Quindi, per ipotesi induttiva, $v(\varphi) = 0$. Dunque, per la *Definizione 2.20.* $v(\neg\varphi) = 1$.
(b) Se $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$, allora $\varphi \in \Gamma$ e $\psi \in \Gamma$ per $(\mathrm{H.b})$. Quindi, per ipotesi induttiva, $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 1$. Dunque, per la *Definizione 2.20.* $v(\varphi \wedge \psi) = 1$.
(c) Se $\varphi \vee \psi \in \Gamma$, allora $\varphi \in \Gamma$ o $\psi \in \Gamma$ per $(\mathrm{H.c})$. Quindi, per ipotesi induttiva, $v(\varphi) = 1$ o $v(\psi) = 1$. Dunque, per la *Definizione 2.20.* $v(\varphi \vee \psi) = 1$.
(d) Se $\varphi \to \psi \in \Gamma$, allora $\varphi \notin \Gamma$ o $\psi \in \Gamma$ per $(\mathrm{H.d})$. Quindi, per ipotesi induttiva, $v(\varphi) = 0$ o $v(\psi) = 1$. Dunque, per la *Definizione 2.20.* $v(\varphi \to \psi) = 1$.

□

Consideriamo ora un ramo di un albero di Beth $\mathcal{T}$ e le formule che vi compaiono, e cerchiamo di capire qual è la relazione tra i tableaux analitici e gli insiemi di Hintikka. Sia Γ l'insieme delle formule di un ramo di $\mathcal{T}$, cosa succede se il ramo è chiuso? Abbiamo detto che un ramo è chiuso quando per qualche formula contiene φ e $\neg\varphi$. Questo significa che se il ramo è chiuso allora Γ conterrà sia φ che $\neg\varphi$: cioè Γ sarà incoerente. Allora se Γ è l'insieme delle formule di un ramo chiuso non potrà esserci alcun modello per Γ (per il *Teorema 2.2.*).

Cosa succede invece nel caso in cui il ramo è terminato ma aperto? Ce lo spiega il seguente risultato

Lemma 2.2. L'insieme di formule di un ramo terminato aperto di $\mathcal{T}$ è un insieme di Hintikka.

Dimostrazione. Sia Γ l'insieme delle formule di un ramo $\mathcal{R}$ terminato aperto di $\mathcal{T}$

(a) Supponiamo per assurdo che $\neg\varphi \in \Gamma$ e $\varphi \in \Gamma$. Allora $\mathcal{R}$ sarebbe chiuso. Contraddizione.
(b) Supponiamo per assurdo che $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ ma $\varphi \notin \Gamma$ o $\psi \notin \Gamma$. Per la regola $(\wedge)$ se $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ allora $\varphi, \psi \in \Gamma$. Contraddizione.
(c) Supponiamo per assurdo che $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ ma $\varphi \notin \Gamma$ e $\psi \notin \Gamma$. Per la regola $(\vee)$ se $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ allora $\varphi \in \Gamma$ o $\psi \in \Gamma$. Contraddizione.
(d) Supponiamo per assurdo che $\varphi \to \psi \in \Gamma$ ma $\varphi \in \Gamma$ e $\psi \notin \Gamma$. Per la regola $(\to)$ se $\varphi \to \psi \in \Gamma$ allora $\varphi \notin \Gamma$ o $\psi \in \Gamma$. Contraddizione.

□

Il *Lemma 2.1.* e il *Lemma 2.2.* definiscono precisamente il senso dell'interpretazione semantica degli alberi di Beth. È in questo senso che il metodo dei tableaux deve essere visto come una procedura sistematica di costruzione di contromodelli. Supponiamo di

voler stabilire la validità di una formula φ. Per procedura, costruiamo un tableau per la sua negazione $\neg\varphi$

- se il tableau è chiuso, allora $\neg\varphi$ non ha modelli. Questo significa che φ è vera in tutti i modelli;
- se invece il tableau termina con un ramo aperto, allora il modello determinato dalle formule di quel ramo è un modello di $\neg\varphi$ e, di conseguenza, un contromodello per φ.

2.7 Correttezza e completezza dei tableaux analitici

A questo punto, chiediamoci se il sistema di prova basato sul metodo dei tableaux analitici sia adeguato a caratterizzare la logica proposizionale. Per essere adeguato, un sistema di prova deve essere in grado di generare tutte e sole le relazioni di conseguenza logica. Dobbiamo quindi stabilire se

(*i*) il sistema di prova è *corretto*:
ogniqualvolta esiste una dimostrazione, tramite il metodo dei tableaux, dell'insieme di formule Δ a partire dall'insieme di formule Γ, allora Δ è conseguenza logica di Γ

$$\text{Se } \Gamma \vdash \Delta \text{ allora } \Gamma \Vdash \Delta$$

(*ii*) il sistema di prova è *completo*:
ogniqualvolta un insieme di formule Δ è conseguenza logica di un insieme di formule Γ, allora esiste una dimostrazione, tramite il metodo dei tableaux, di Δ a partire da Γ

$$\text{Se } \Gamma \Vdash \Delta \text{ allora } \Gamma \vdash \Delta$$

Come vedremo, il risultato di completezza si basa sul *Lemma 2.1. di Hintikka*. Il risultato di correttezza si fonda invece sul lemma seguente, il quale stabilisce che ogni modello per un insieme di formule Θ è anche un modello per l'insieme di formule del ramo generato applicando a Θ le regole di trasformazione del calcolo dei tableaux.

Lemma 2.3. Sia Θ un insieme soddisfacibile di formule di $\mathcal{L}_0$, allora

(a) se $\alpha \in \Theta$ allora $\Theta \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$ è soddisfacibile;
(b) Se $\beta \in \Theta$ allora $\Theta \cup \{\beta_1\}$ o $\Theta \cup \{\beta_2\}$ è soddisfacibile.

Dimostrazione. Per induzione sulla complessità della formula.
Se $\alpha \in \Theta$ allora abbiamo quattro casi da analizzare di regole congiuntive: ($\wedge$), ($\neg\vee$), ($\neg \rightarrow$), ($\neg\neg$)

– ($\wedge$) Assumiamo che $\varphi\wedge\psi \in \Theta$. Supponiamo, per assurdo, che esista una valutazione v tale che $v(\varphi \wedge \psi) = 1$ ma che $v(\varphi) = 0$ o $v(\psi) = 0$. Se $v(\varphi \wedge \psi) = 1$, allora per la *Definizione 2.20.* $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 1$. Questo contraddice l'assunto iniziale.

– ($\neg\vee$) Assumiamo che $\neg(\varphi \vee \psi) \in \Theta$. Supponiamo, per assurdo, che esista una valutazione v tale che $v(\neg(\varphi\vee\psi)) = 1$ ma che $v(\varphi) = 1$ o $v(\psi) = 1$. Se $v(\neg(\varphi\vee\psi)) = 1$, allora per la *Definizione 2.20.* $v(\varphi \vee \psi) = 0$. Questo implica che $v(\varphi) = 0$ e $v(\psi) = 0$, in contraddizione con l'assunto iniziale.

– ($\neg \rightarrow$) Assumiamo che $\neg(\varphi \rightarrow \psi) \in \Theta$. Supponiamo, per assurdo, che esista una valutazione v tale che $v(\neg(\varphi \rightarrow \psi)) = 1$ ma che $v(\varphi) = 0$ o $v(\psi) = 1$. Se $v(\neg(\varphi \rightarrow \psi)) = 1$, per la *Definizione 2.20.* $v(\varphi \rightarrow \psi) = 0$. Questo implica che $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 0$, in contraddizione con l'assunto iniziale.

– ($\neg\neg$) Assumiamo che $\neg(\neg\varphi) \in \Theta$. Supponiamo, per assurdo, che esista una valutazione v tale che $v(\neg(\neg\varphi)) = 1$ ma che $v(\varphi) = 0$. Poiché $v(\neg(\neg\varphi)) = 1$, per la *Definizione 2.20.* si ha $v(\neg\varphi) = 0$, il che implica $v(\varphi) = 1$. Questo contraddice l'assunto iniziale.

Se $\beta \in \Theta$, allora abbiamo tre casi da analizzare di regole disgiuntive: $(\neg\wedge), (\vee), (\rightarrow)$

– ($\neg\wedge$) Assumiamo che $\neg(\varphi \wedge \psi) \in \Theta$. Supponiamo, per assurdo, che esista una valutazione v tale che $v(\neg(\varphi \wedge \psi)) = 1$ ma che $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 1$. Poiché $v(\neg(\varphi \wedge \psi)) = 1$, per la *Definizione 2.20.* $v(\varphi \wedge \psi) = 0$, il che implica $v(\varphi) = 0$ o $v(\psi) = 0$. Questo contraddice l'assunto iniziale.

– ($\vee$) Assumiamo che $\varphi\vee\psi \in \Theta$. Supponiamo, per assurdo, che esista una valutazione v tale che $v(\varphi \vee \psi) = 1$ ma che $v(\varphi) = 0$ e $v(\psi) = 0$. Poiché $v(\varphi \vee \psi) = 1$, per la *Definizione 2.20.* si ha $v(\varphi) = 1$ o $v(\psi) = 1$. Questo contraddice l'assunto iniziale.

– ($\rightarrow$) Assumiamo che $\varphi \rightarrow \psi \in \Theta$. Supponiamo, per assurdo, che esista una valutazione v tale che $v(\varphi \rightarrow \psi) = 1$ ma che $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 0$. Poiché $v(\varphi \rightarrow \psi) = 1$, per la *Definizione 2.20.* si ha $v(\varphi) = 0$ o $v(\psi) = 1$. Questo contraddice l'assunto iniziale.

□

A questo punto possiamo dimostrare il risultato centrale, da cui correttezza e completezza del calcolo dei tableaux per la logica proposizionale seguono come semplici corollari.

Lemma 2.4. Un insieme Γ di formule di $\mathcal{L}_0$ è soddisfacibile se e solo se non esiste un tableau chiuso per Γ.

Dimostrazione. ($\Longrightarrow$) Supponiamo per assurdo che Γ sia soddisfacibile ma che ci sia un tableau chiuso per Γ. Se Γ è soddisfacibile allora ha un modello e, per il *Lemma 2.3.*, ogni modello per un insieme di formule Γ è anche modello per almeno uno dei rami aperti di un tableau per Γ. Ne consegue che ogni tableau per Γ ha un ramo aperto. Contraddizione.
($\Longleftarrow$) Supponiamo per assurdo che non esista un tableau chiuso per Γ ma che Γ sia insoddisfacibile. Dalla *Definizione 2.34.* sappiamo che è sempre possibile costruire un

tableau terminato per un insieme di formule Γ. Dunque se non esiste un tableau chiuso per Γ vuol dire che ogni tableau per Γ ha almeno un ramo aperto. Quindi per il *Lemma 2.1. di Hintikka* esiste un modello per Γ, cioè Γ è soddisfacibile. Contraddizione.

□

Dal *Lemma 2.4.* segue immediatamente il risultato di correttezza e completezza per il calcolo dei tableaux analitici.

Teorema 2.3. $\Gamma \vdash \Delta \quad \text{sse} \quad \Gamma \Vdash \Delta$

Dimostrazione. Dalla *Definizione 2.36.* una prova di Δ da Γ nel calcolo dei tableaux è un albero chiuso per $\Gamma \cup \{\neg\Delta\}$

- (*Correttezza*) se esiste un albero chiuso per $\Gamma \cup \{\neg\Delta\}$, allora per il *Lemma 2.4.* non esiste un modello tale che $v(\Gamma) = 1$ e per ogni $\varphi \in \Delta$, $v(\varphi) = 0$. Cioè Δ è conseguenza logica di Γ;
- (*Completezza*) se tutti i modelli per Γ sono anche modelli per Δ allora l'insieme di formule $\Gamma \cup \{\neg\Delta\}$ è insoddisfacibile, quindi per il *Lemma 2.4.* esiste un tableau chiuso per $\Gamma \cup \{\neg\Delta\}$.

□

ESERCIZI CAP. 2.

Esercizio 2.1. Calcolare il grado di complessità, $\#(\varphi)$, per ciascuna delle seguenti formule φ.

1. $\varphi_1 = p \vee q$
2. $\varphi_2 = \neg(p \wedge q)$
3. $\varphi_3 = \neg p \rightarrow q$
4. $\varphi_4 = (p \wedge q) \vee r$
5. $\varphi_5 = p \rightarrow (q \vee r)$
6. $\varphi_6 = \neg(\neg p)$
7. $\varphi_7 = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
8. $\varphi_8 = \neg(p \vee \neg r)$
9. $\varphi_9 = p \rightarrow ((q \wedge r) \vee s)$
10. $\varphi_{10} = \neg(\neg(\neg p))$

Esercizio 2.2. Per ciascuna delle seguenti formule φ calcolare: la sequenza di formazione $S(\varphi)$, la sottoformula immediata $SFI(\varphi)$, l'albero di struttura, il multinsieme di formule $MS(\varphi)$, l'altezza $h(\varphi)$ della formula.

1. $\varphi_1 = \neg(p \vee q)$
2. $\varphi_2 = (p \wedge q) \rightarrow r$
3. $\varphi_3 = \neg(\neg p \wedge q)$
4. $\varphi_4 = p \vee (q \wedge r)$
5. $\varphi_5 = (p \rightarrow q) \vee \neg r$

Esercizio 2.3. ♠ Per ciascuna delle seguenti formule φ calcolare: la sequenza di formazione $S(\varphi)$, la sottoformula immediata $SFI(\varphi)$, l'albero di struttura, il multinsieme di formule $MS(\varphi)$, l'altezza $h(\varphi)$ della formula.

6. $\varphi_6 = (p \wedge \neg q) \rightarrow \neg(r \vee p)$
7. $\varphi_7 = \neg((p \vee q) \wedge (\neg r \rightarrow p))$
8. $\varphi_8 = (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \vee \neg p$
9. $\varphi_9 = \neg(\neg(\neg p \wedge \neg q))$
10. $\varphi_{10} = ((p \wedge q) \vee (r \wedge \neg p)) \rightarrow q$

Esercizio 2.4. Verificare se le seguenti formule sono logicamente valide (tautologie) utilizzando il metodo delle tavole di verità o dei tableaux analitici.

1. $\Vdash \neg(p \wedge \neg p)$ (non contraddizione)
2. $\Vdash p \vee \neg p$ (terzo escluso)
3. $\Vdash p \leftrightarrow \neg\neg p$ (doppia negazione)
4. $\Vdash \neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$ (ex falso quodlibet)
5. $\Vdash p \rightarrow p$ (identità)
6. $\Vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$ (aggiunta)

7. $\Vdash (p \to q) \to (q \to r) \to (p \to r)$ (transitività)
8. $\Vdash (p \to (p \to q)) \to (p \to q)$ (contrazione)
9. $\Vdash (p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$ (scambio)
10. $\Vdash ((p \to q) \to p) \to p$ (legge di Peirce)

Esercizio 2.5. Verificare se le seguenti formule sono logicamente valide (tautologie) utilizzando il metodo dei tableaux analitici.

1. $\Vdash (p \to (p \to q)) \to q$ (modus ponens)
2. $\Vdash (\neg q \to (p \to q)) \to \neg p$ (modus tollens)
3. $\Vdash (p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$ (contrapposizione)
4. $\Vdash p \wedge q \to p$ (minorante)
5. $\Vdash p \wedge q \to q$ (minorante)
6. $\Vdash (p \to q) \to (p \to r) \to (p \to q \wedge r)$ (massimo minorante)
7. $\Vdash p \wedge p \leftrightarrow p$ (idempotenza)
8. $\Vdash p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$ (commutatività)
9. $\Vdash p \to p \vee q$ (maggiorante)
10. $\Vdash q \to p \vee q$ (maggiorante)
11. $\Vdash (p \to r) \to (q \to r) \to (p \vee q \to r)$ (minimo maggiorante)
12. $\Vdash p \vee p \leftrightarrow p$ (idempotenza)
13. $\Vdash p \vee q \leftrightarrow q \vee p$ (commutatività)
14. $\Vdash p \wedge (q \vee r) \to (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (distributività)
15. $\Vdash \neg(p \wedge q) \to (\neg p \vee \neg q)$ (legge di De Morgan)
16. $\Vdash p \wedge q \to \neg(p \to \neg q)$ (congiunzione in termini di implicazione)
17. $\Vdash p \vee (q \wedge r) \to (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (distributività)
18. $\Vdash \neg(p \vee q) \to (\neg p \wedge \neg q)$ (legge di De Morgan)
19. $\Vdash p \vee q \to \neg p \to q$ (disgiunzione in termini di implicazione)
20. $\Vdash (p \to q) \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$ (legge di Crisippo)

Esercizio 2.6. ♠ Verificare se le seguenti formule sono conseguenze logiche utilizzando il metodo dei tableaux analitici.

1. $p \wedge (p \to q) \Vdash q$
2. $p \vee (p \to q) \Vdash q$
3. $(p \to q) \wedge (q \to r) \Vdash p \to r$
4. $\neg(p \vee q) \Vdash \neg p \wedge \neg q$
5. $p \wedge q \Vdash p$
6. $p \wedge q \Vdash q$
7. $p \Vdash p \vee q$
8. $(p \to q) \Vdash (\neg q \to \neg p)$
9. $(p \vee q) \wedge \neg q \Vdash p$
10. $(p \to q) \wedge (q \to r) \wedge p \Vdash r$

11. $p \to (q \to r) \Vdash (p \wedge q) \to r$
12. $(p \to q) \wedge (p \to r) \Vdash p \to (q \wedge r)$
13. $p \vee q \Vdash q \vee p$
14. $(p \wedge q) \vee r \Vdash (p \vee r) \wedge (q \vee r)$
15. $(p \to r) \wedge (q \to r) \Vdash (p \vee q) \to r$
16. $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge \neg r \Vdash q$
17. $(p \vee q) \wedge \neg p \wedge \neg q \Vdash r$ ($\nVdash$)
18. $(p \to q) \wedge (q \to r) \Vdash p \vee r$ ($\nVdash$)
19. $p \wedge q \Vdash p \vee q$ ($\nVdash$)
20. $\neg(p \wedge q) \Vdash \neg p$ ($\nVdash$)
21. $(p \to q) \Vdash (q \to p)$ ($\nVdash$)
22. $(p \vee q) \to r \Vdash (p \to r) \vee (q \to r)$
23. $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \Vdash p \wedge (q \vee r)$
24. $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \Vdash q \vee r$
25. $p \vee (q \wedge r) \Vdash (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
26. $p \vee q \vee r \Vdash (p \vee q) \vee r$
27. $(p \to r) \vee (q \to r) \Vdash (p \vee q) \to r$
28. $(p \wedge q) \to r \Vdash p \to (q \to r)$
29. $(p \to q) \vee (q \to p) \Vdash p \vee q$ ($\nVdash$)
30. $(p \to q) \vee (q \to r) \Vdash p \to r$ ($\nVdash$)

SOLUZIONE ESERCIZI CAP. 2.

Soluzione Esercizio 2.1.

1. $\varphi_1 = p \vee q$
$$\#(\varphi_1) = \#(p) + \#(q) + 1 = 0 + 0 + 1 = 1$$
2. $\varphi_2 = \neg(p \wedge q)$
$$\#(\varphi_2) = \#(p \wedge q) + 1 = (\#(p) + \#(q) + 1) + 1 = (0 + 0 + 1) + 1 = 2$$
3. $\varphi_3 = \neg p \to q$
$$\#(\varphi_3) = \#(\neg p) + \#(q) + 1 = (\#(p) + 1) + 0 + 1 = (0 + 1) + 0 + 1 = 2$$
4. $\varphi_4 = (p \wedge q) \vee r$
$$\#(\varphi_4) = \#(p \wedge q) + \#(r) + 1 = (\#(p) + \#(q) + 1) + 0 + 1 = (0 + 0 + 1) + 0 + 1 = 2$$
5. $\varphi_5 = p \to (q \vee r)$
$$\#(\varphi_5) = \#(p) + \#(q \vee r) + 1 = 0 + (\#(q) + \#(r) + 1) + 1 = 0 + (0 + 0 + 1) + 1 = 2$$
6. $\varphi_6 = \neg(\neg p)$
$$\#(\varphi_6) = \#(\neg p) + 1 = (\#(p) + 1) + 1 = (0 + 1) + 1 = 2$$
7. $\varphi_7 = (p \to q) \wedge (q \to p)$
$$\begin{aligned}\#(\varphi_7) &= \#(p \to q) + \#(q \to p) + 1 \\ &= (\#(p) + \#(q) + 1) + (\#(q) + \#(p) + 1) + 1 \\ &= (0 + 0 + 1) + (0 + 0 + 1) + 1 = 1 + 1 + 1 = 3\end{aligned}$$
8. $\varphi_8 = \neg(p \vee \neg r)$
$$\begin{aligned}\#(\varphi_8) &= \#(p \vee \neg r) + 1 \\ &= (\#(p) + \#(\neg r) + 1) + 1 \\ &= (0 + (\#(r) + 1) + 1) + 1 = (0 + 1 + 1) + 1 = 3\end{aligned}$$
9. $\varphi_9 = p \to ((q \wedge r) \vee s)$
$$\begin{aligned}\#(\varphi_9) &= \#(p) + \#((q \wedge r) \vee s) + 1 \\ &= 0 + (\#(q \wedge r) + \#(s) + 1) + 1 \\ &= 0 + ((\#(q) + \#(r) + 1) + 0 + 1) + 1 \\ &= 0 + (1 + 1) + 1 = 3\end{aligned}$$

10. $\varphi_{10} = \neg(\neg(\neg p))$

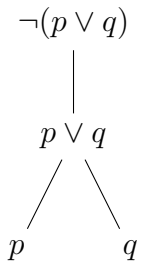
$$\begin{aligned}\#(\varphi_{10}) &= \#(\neg(\neg p)) + 1 \\ &= (\#(\neg p) + 1) + 1 \\ &= ((\#(p) + 1) + 1) + 1 \\ &= ((0 + 1) + 1) + 1 = 3\end{aligned}$$

Soluzione Esercizio 2.2.

Assumiamo $p, q, r \in Var_0$.

1. $\varphi_1 = \neg(p \vee q)$

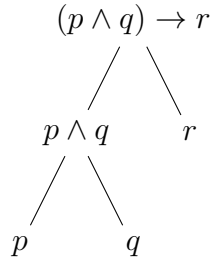
- $S(\varphi_1) = (\neg(p \vee q), p \vee q, p, q)$
- $SFI(\varphi_1) = \{p \vee q\}$
- Albero di struttura



- $MS(\varphi_1) = \{\neg(p \vee q), p \vee q, p, q\}$
- Altezza $h(\varphi_1) = 2$

2. $\varphi_2 = (p \wedge q) \to r$

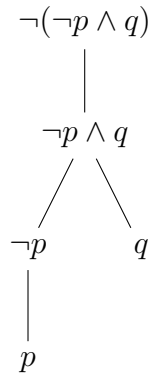
- $S(\varphi_2) = ((p \wedge q) \to r, p \wedge q, r, p, q)$
- $SFI(\varphi_2) = \{p \wedge q, r\}$
- Albero di struttura



- $MS(\varphi_2) = \{(p \wedge q) \to r, p \wedge q, r, p, q\}$
- Altezza $h(\varphi_2) = 2$

3. $\varphi_3 = \neg(\neg p \wedge q)$

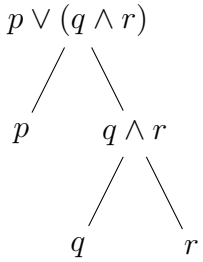
- $S(\varphi_3) = (\neg(\neg p \wedge q), \neg p \wedge q, \neg p, q, p)$
- $SFI(\varphi_3) = \{\neg p \wedge q\}$
- Albero di struttura



- $MS(\varphi_3) = \{\neg(\neg p \wedge q), \neg p \wedge q, \neg p, q, p\}$
- Altezza $h(\varphi_3) = 3$

4. $\varphi_4 = p \vee (q \wedge r)$

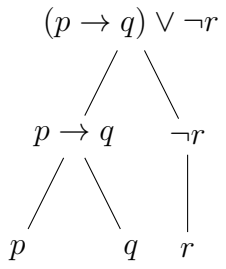
- $S(\varphi_4) = (p \vee (q \wedge r), p, q \wedge r, q, r)$
- $SFI(\varphi_4) = \{p, q \wedge r\}$
- Albero di struttura



- $MS(\varphi_4) = \{p \vee (q \wedge r), p, q \wedge r, q, r\}$
- Altezza $h(\varphi_4) = 2$

5. $\varphi_5 = (p \to q) \vee \neg r$

- $S(\varphi_5) = ((p \to q) \vee \neg r, p \to q, \neg r, p, q, r)$
- $SFI(\varphi_5) = \{p \to q, \neg r\}$
- Albero di struttura

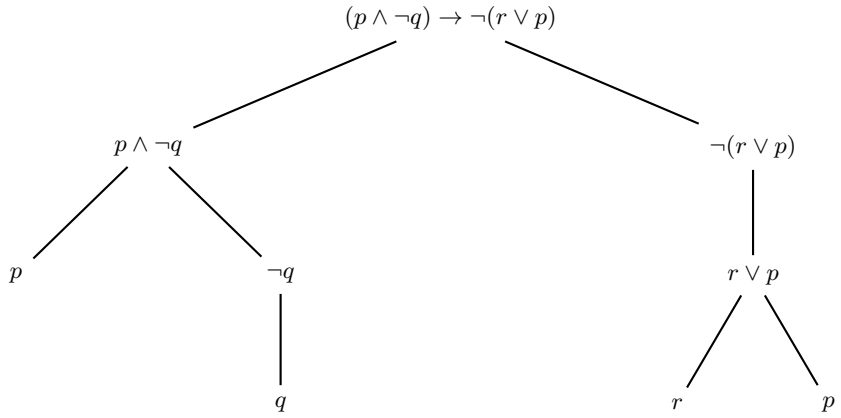


- $MS(\varphi_5) = \{(p \to q) \vee \neg r, p \to q, \neg r, p, q, r\}$
- Altezza $h(\varphi_5) = 2$

Soluzione Esercizio 2.3.

6. $\varphi_6 = (p \wedge \neg q) \to \neg(r \vee p)$

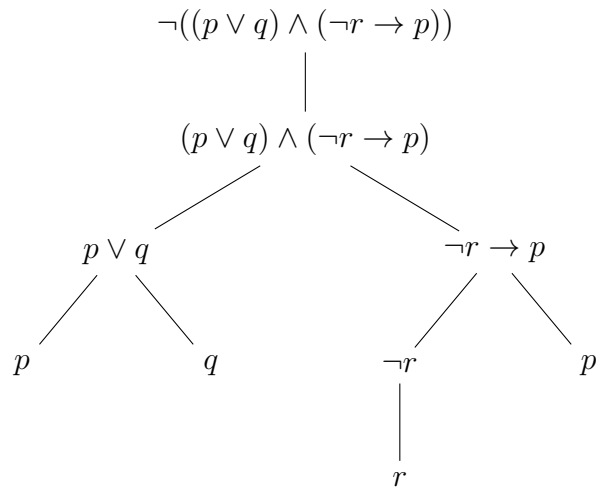
- $S(\varphi_6) = (\varphi_6, p \wedge \neg q, \neg(r \vee p), p, \neg q, r \vee p, q, r)$
- $SFI(\varphi_6) = \{p \wedge \neg q, \neg(r \vee p)\}$
- Albero di struttura



- $MS(\varphi_6) = \{\varphi_6, p \wedge \neg q, \neg(r \vee p), p, \neg q, r \vee p, q, r, p\}$
- Altezza $h(\varphi_6) = 3$

7. $\varphi_7 = \neg((p \vee q) \wedge (\neg r \to p))$

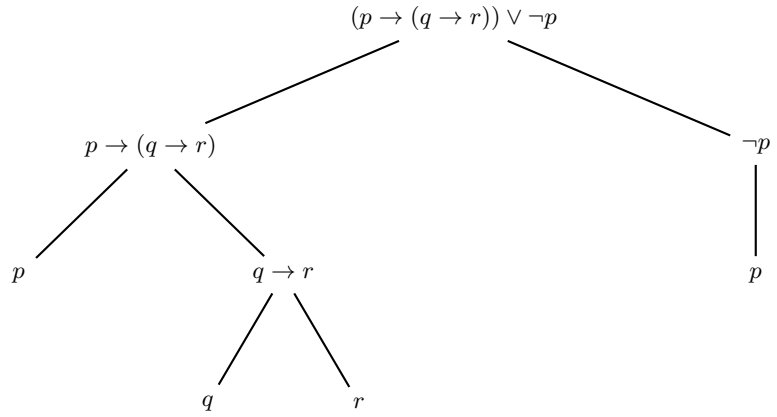
- $S(\varphi_7) = (\varphi_7, (p \vee q) \wedge (\neg r \to p), p \vee q, \neg r \to p, p, q, \neg r, r)$
- $SFI(\varphi_7) = \{(p \vee q) \wedge (\neg r \to p)\}$
- Albero di struttura



- $MS(\varphi_7) = \{\varphi_7, (p \vee q) \wedge (\neg r \to p), p \vee q, \neg r \to p, p, q, \neg r, r, p\}$
- Altezza $h(\varphi_7) = 4$

8. $\varphi_8 = (p \to (q \to r)) \vee \neg p$

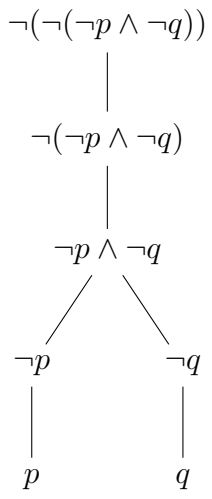
- $S(\varphi_8) = (\varphi_8, p \to (q \to r), \neg p, p, q \to r, r, q)$
- $SFI(\varphi_8) = \{p \to (q \to r), \neg p\}$
- Albero di struttura



- $MS(\varphi_8) = \{\varphi_8, p \to (q \to r), \neg p, p, q \to r, q, r, p\}$
- Altezza $h(\varphi_8) = 3$

9. $\varphi_9 = \neg(\neg(\neg p \wedge \neg q))$

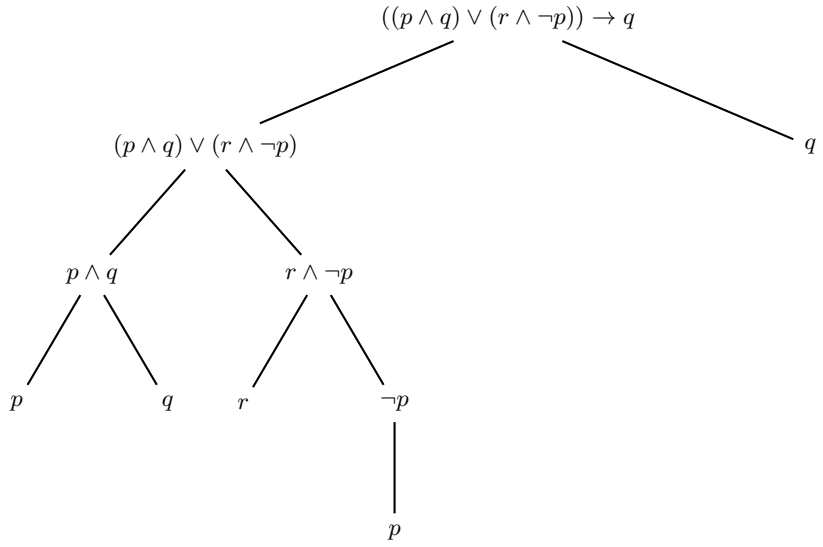
- $S(\varphi_9) = (\varphi_9, \neg(\neg p \wedge \neg q), \neg p \wedge \neg q, \neg p, \neg q, p, q)$
- $SFI(\varphi_9) = \{\neg(\neg p \wedge \neg q)\}$
- Albero di struttura



- $MS(\varphi_9) = \{\varphi_9, \neg(\neg p \wedge \neg q), \neg p \wedge \neg q, \neg p, \neg q, p, q\}$
- Altezza $h(\varphi_9) = 4$

10. $\varphi_{10} = ((p \wedge q) \vee (r \wedge \neg p)) \rightarrow q$

- $S(\varphi_{10})$: La sequenza deve elencare prima la formula principale, seguita dalle sue sottoformule immediate, poi le sottoformule di queste ultime, fino alle atomiche.
- $\mathbf{S}(\varphi_{\mathbf{10}}) = (\varphi_{\mathbf{10}}, (\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \vee (\mathbf{r} \wedge \neg \mathbf{p}), \mathbf{q}, \mathbf{p} \wedge \mathbf{q}, \mathbf{r} \wedge \neg \mathbf{p}, \neg \mathbf{p}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{p})$
- $SFI(\varphi_{10}) = \{(p \wedge q) \vee (r \wedge \neg p), q\}$
- Albero di struttura



- $MS(\varphi_{10}) = \{\varphi_{10}, (p \wedge q) \vee (r \wedge \neg p), q, p \wedge q, r \wedge \neg p, p, q, r, \neg p, p\}$
- Altezza $h(\varphi_{10}) = 3$

3

Calcolo dei sequenti

Il CAP. 3 è dedicato al calcolo dei sequenti, introdotto nel 1934 da Gentzen per rispondere a un'esigenza di maggiore prossimità e rigore della logica rispetto alle forme del ragionamento nella pratica matematica. Dopo aver presentato il contesto storico-epistemologico che ha portato alla nascita della teoria della dimostrazione, il capitolo introduce il calcolo dei sequenti per la logica proposizionale classica e intuizionistica. Per il calcolo classico dimostreremo, in modo dettagliato, i teoremi di correttezza e completezza. Il capitolo si conclude con una sezione sull'analiticità delle dimostrazioni logiche.

3.1 Teoria della dimostrazione: il contesto storico-epistemologico

L'idea di dimostrazione matematica è molto antica, ma i principi di uno studio sistematico e strutturale della dimostrazione matematica, la *proof theory*, possono essere simbolicamente fatti risalire al 1905, anno in cui Hilbert ebbe la notevole intuizione di "considerare la dimostrazione stessa un oggetto matematico". A livello storico, bisogna rintracciare le origini concettuali della teoria della dimostrazione nel pensiero classico e, nello specifico, nell'organizzazione assiomatica della matematica da parte di Aristotele ed Euclide. L'idea principale di tale organizzazione è di identificare un numero possibilmente ristretto di proposizioni vere, dette appunto assiomi, a cui ogni altra proposizione vera possa essere ridotta tramite dimostrazione. Questa idea è epistemologicamente (e metafisicamente) fondata, a sua volta, sul *modello classico* della conoscenza. Il modello epistemologico classico, come sappiamo, era basato sulla deduzione dei fatti da leggi o principi che scaturivano *dall'intuizione dell'essenza delle cose*. Per tale motivo, la verità degli assiomi deve essere immediata, mentre la verità delle altre proposizioni è assicurata dalle dimostrazioni che hanno il compito di trasmettere evidenza lungo tutto il loro percorso.

Questo modello vale tanto per la filosofia quanto per la matematica, e in questo senso sono emblematici gli *Elementi* di Euclide. I postulati sono considerati veri a proposito degli enti geometrici fondamentali (punti, linee, rette, figure, . . .) perché ci dicono

quali proprietà appartengono loro per essenza: alle proposizioni iniziali si richiede il carattere dell'evidenza di una realtà osservata. Ma affermare che ci appare con evidenza che una specifica proprietà è posseduta da un determinato ente geometrico vuol dire affermare che di tali enti noi abbiamo *intuizione essenziale*. Per questo motivo il metodo euclideo poggiava su tecniche costruttive fondate sull'intuizione dello spazio e degli enti geometrici. Il fondamento di una teoria assiomatica *classica* ha dunque carattere puramente intuitivo o extra-logico: il perno della teoria sono gli assiomi e la loro giustificazione sola si basa sul loro essere evidenti.

La scienza moderna entra in urto con il modello epistemologico antico (in particolare le scienze empiriche) riguardo al concetto stesso di giustificazione scientifica. Se spiegare un fenomeno significa mostrare, tanto per gli antichi quanto per i moderni, che tra il fenomeno e le leggi o principi capaci di spiegarlo sussiste una relazione di conseguenza logica, il modello antico considerava il fenomeno spiegato solo se le verità delle leggi implicava la verità del fenomeno e la verità delle leggi era fondata sull'evidenza (evidenza a sua volta fondata sulla possibilità di accedere all'essenza delle cose). Al contrario, il metodo galileano rifiuta il fatto che i principi si possano giustificare in forza della loro evidenza: "Il tentar l'essenza, l'ho per impresa non meno impossibile e per fatica non men vana nelle prossime sustanze elementari che nelle remotissime e celesti" (III lettera di Galileo a Velseri). In questo nuovo contesto scientifico la logica perse il suo ruolo di *organo* del sapere in quanto non più strumento adatto alla descrizione dei fenomeni: la sillogistica era fondata sua una visione classificatoria della natura e, soprattutto, su un linguaggio di proprietà e non di relazioni. Al contrario, il linguaggio matematico era fondato su una concezione relazionale delle strutture del mondo. Accanto al suo ruolo di analisi del linguaggio la logica contenuta negli *Analitici Primi* perse anche la funzione di calcolo: nasce l'esigenza di una logica induttiva di natura probabilistica posta dal nuovo metodo.

Tuttavia, se è vero che le scienze empiriche entrano in forte conflitto con il modello epistemologico antico già nel Cinquecento, al contrario, per quanto riguarda le scienze matematiche, bisogna attendere l'Ottocento e la scoperta delle *geometrie non euclidee* per assistere a una rivoluzione epistemologica. Infatti, il modello assiomatico degli *Elementi* di Euclide, vale a dire il modello epistemologico antico, rimase il fondamento teoretico delle scienze matematiche fino alla scoperta delle geometrie non euclidee. Tale modello è prevalente e predominante per secoli e si manifesta storiograficamente proprio nel modo in cui già i primi commentatori degli *Elementi* cercarono di eliminare il "neo" rappresentato dall'assunzione del *quinto postulato*, noto come postulato della parallela perché lo si può riformulare in modo equivalente come la proposizione che "data nel piano una retta e un punto fuori di essa, per quel punto passa una e una sola parallela alla retta data". Fin dai tempi di Euclide al V postulato fu riconosciuto un grado di evidenza minore rispetto agli altri. I primi quattro postulati, sui quali Euclide aveva edificato la catena di deduzioni dei 13 libri che componevano il suo sistema, non attirarono mai una particolare attenzione. Affermazioni quali, "per due

punti dati è possibile tracciare una retta" (I postulato), "ogni segmento è prolungabile indefinitamente" (II postulato), "per ogni punto è possibile tracciare una circonferenza con un raggio fissato" (III postulato) e "tutti gli angoli retti sono uguali tra loro" (IV postulato), vennero considerate non problematiche, essendo dotate di un sufficiente carattere di evidenza. Al contrario, per il V postulato sin dall'antichità furono mossi forti dubbi sulla sua evidenza e legittimità. Per questo motivo, i matematici per secoli intrapresero vari tentativi di sostituzione del postulato euclideo mediante assunzioni ritenute più evidenti e, in alcune circostanze, anche attraverso dimostrazioni dello stesso sulla base dei soli primi quattro assiomi del sistema *Euclideo*. Nell'*Encyclopédie*, Jean-Baptiste Le Rond D'Alembert (1717-1783) sintetizzò il fallimento di tali sforzi, riconoscendo a malincuore che "la definizione e le proprietà della retta e quella delle parallele sono lo scoglio e, per così dire, lo scandalo della geometria elementare".

Ma la necessità di sostituire il V postulato con un postulato più evidente, o di ottenerlo come teorema, nasceva proprio dalla struttura del modello antico di scienza; in tale modello una proposizione scientifica si può ammettere o perché è di per sé *evidente*, o perché è *dimostrata* a partire da proposizioni evidenti. In questo senso, le geometrie non euclidee sono rivoluzionarie perché portano a compimento la falsificazione del modello epistemologico antico: dal momento che non è più possibile assumere che i postulati siano veri perché evidenti, e poiché evidenti non contraddittori, "per assicurare che essi non conducano alla contraddizione, è necessaria una prova di consistenza indipendente, ossia che non faccia ricorso alla stessa verità degli assiomi" (Galvan 2012, p. 17).

Una svolta si ebbe con Giovanni Girolamo Saccheri (1667-1733) che per primo in un'opera pubblicata nel 1733 dal titolo *Euclides ab omni nævo vindicatus*, "affronta la questione da logico" (Mangione & Bozzi 1993, p. 30), sviluppando una dimostrazione indiretta anziché diretta, ossia cercando di dimostrare assurda l'ammissione della sua negazione: la negazione del quinto postulato è un assurdo poiché dagli assiomi è ricavabile la negazione della negazione del quinto postulato, ossia il postulato stesso. Nonostante la dimostrazione di Saccheri fosse anche non concludente, quello che deve essere evidenziato è l'aspetto rivoluzionario del suo metodo. Un nuovo metodo epistemologico fondato sul fatto che l'evidenza degli assiomi non è più condizione necessaria per l'accettazione degli assiomi stessi. L'unica condizione di legittimità veramente insopprimibile è la non contraddittorietà:

> Tuttavia essa è interessante per due ragioni. In primo luogo perché si assume la non contraddittorietà come criterio necessario e sufficiente per legittimare una teoria matematica, indipendentemente dal fatto che questa contenga proposizioni in contrasto con l'intuizione geometrica; in secondo luogo perché (pur proponendosi di validare la geometria euclidea ed essendo convinto di esserci riuscito), l'autore del volumetto costruì di fatto i primi esempi di geometrie non euclidee, ossia sviluppò una serie di teoremi che seguono logicamente dalla negazione del postulato di Euclide. (Agazzi 2006, pp. 141-142)

L'opera di Saccheri rimase praticamente sconosciuta e quasi un secolo dopo, nel 1830, János Bolyai (1802-1860) e Nikolaj Ivanovič Lobačevskij (1793-1856) osarono rinunciare al famoso V postulato di Euclide[1]. Costruirono così, in modo indipendente, due sistemi di geometria non euclidea, convinti della loro non contraddittorietà logica interna nonostante il loro carattere antiintuitivo. I loro risultati non si imposero solo nella comunità matematica, ma, forse ancora più significativamente, obbligarono l'intera comunità scientifica a rinunciare al modello assiomatico così com'era stato concepito fino a quel momento[2]. Come osserva Sergio Galvan:

> La rivoluzione non euclidea arriva a compimento quando ci si rende conto in base alla costruzione di modelli non euclidei (come il modello di Poincarè o il modello sferico di Riemann) che il V postulato non può essere dimostrato. Infatti tali modelli mostrano che il V postulato non può essere conseguenza logica degli altri assiomi (geometria assoluta) e perciò in forza della correttezza della logica neppure un teorema. Essi sono tali, cioè, da soddisfare tutti gli assiomi della geometria assoluta e, al contempo, una o l'altra forma di negazione del V postulato. In conclusione, il V postulato non è evidente e non può essere dimostrato, pur essendo percepito come vero. È così il modello epistemologico antico a farne le spese. La nascita della geometrie non euclidee segna dunque il momento della falsificazione completa di quel modello. (Galvan 2012, p. 16)

L'intuizione, che aveva indotto erroneamente a credere nella verità del V postulato, non poteva più essere considerata il fondamento delle teorie assiomatiche. Si poneva quindi un'urgente domanda: cosa poteva sostituirla nel ruolo di garante della legittimità di un sistema formale? Rispondere a questa domanda risultò ancora più complicato se si pensa che la scoperta delle geometrie non euclidee non fu la sola grande innovazione all'interno delle scienze matematiche dell'Ottocento. Infatti, se la scoperta delle geometrie non euclidee può essere considerata l'evento epistemologicamente più importante della matematica dell'Ottocento, l'elenco delle nuove aree di sviluppo è vastissimo e include, come abbiamo già visto nei precedenti capitoli, l'aritmetizzazione dell'analisi, l'algebrizzazione della logica, i numeri complessi, le algebre, i vettori, le matrici e la teoria degli insiemi. La matematica ha vissuto nel XIX secolo un pe-

[1] In realtà, già tra la fine del Settecento e i primi decenni dell'Ottocento, il giovanissimo Carl Friedrich Gauss (1777-1855) rinunciò all'idea kantiana che lo spazio sia una intuizione *a priori* e obbligò, attraverso i suoi studi, la comunità matematica a ripensare profondamente le basi epistemologiche della geometria. In particolare, in una lettera inviata all'astronomo Friedrich Wilhelm Bessell (1784-1846) nel 1829, Gauss dichiarò di essere in possesso di numerosi risultati di geometria non euclidea, ma di non volerli pubblicare per paura "delle strida dei beoti", probabilmente un'allusione ai seguaci dell'ortodossia kantiana.

[2] Ci preme sottolineare che rinunciare al modello assiomatico classico non vuol dire rinunciare alla geometria euclidea. Ad esempio, nel caso della geometria iperbolica, lo spazio euclideo non scompare completamente, ma si relaziona, con la propria geometria intrinseca, su opportune superfici: le sfere. Il modello euclideo è, quindi, concretamente presente all'interno di uno spazio non euclideo. Paradossalmente, si può affermare la stessa cosa per la geometria euclidea: al suo interno sono già disponibili tutti gli elementi per costruire una geometria non euclidea. Per questi motivi, la geometria euclidea e le geometrie non euclidee sono *equicompatibili*: la coerenza di una implica la coerenza delle altre.

riodo di straordinaria espansione, che ha reso impossibile continuare a considerarla semplicemente come la scienza dei numeri e delle figure:

> Nell'Ottocento la matematica ha vissuto una crisi di crescita, o di abbondanza, che era parte, riflesso ed elemento attivo del più generale tumultuoso sviluppo della società europea. Per dare un'idea a chi non sia esperto, si potrebbe dire che all'inzio del secolo diciannovesimo la matematica era più o meno quella che oggi si studia nella scuola secondaria (a parte i risultati più avanzati dell'analisi), alla fine del secolo è quella che oggi si studia all'università. (Lolli 2011, pp. 1-2)

Ricapitolando, la matematica moderna vive uno sviluppo concettuale quantitativo e qualitativo, tale che i nuovi "concetti astratti non avevano più alcuna intuizione sensibile a cui appoggiarsi e che potesse facilitare le inferenze" (Lolli 2005, p. 29).

Per questo motivo, tra la fine dell'Ottocento e i primi anni del Novecento molti matematici si rivolgono a problemi di *fondamenti* in modo più esplicito e dedicato di quanto non sia avvenuto in altre epoche. In particolare, nel 1879 Frege, nell'opera *Ideografia, un linguaggio in formule del pensiero puro costruito sul modello dell'aritmetica*, criticò la scarsità di rigore della maggior parte delle dimostrazioni matematiche. Per ovviare a ciò, introdusse la prima notazione matematica per le dimostrazioni, che in tedesco chiamò *Begrifftschrift*. Frege paragonò questo sistema ideografico a un microscopio, che traduceva le dimostrazioni "vernacolari" dei matematici in dimostrazioni formali, capaci di essere studiate come qualsiasi altro oggetto matematico. Nonostante la sua straordinaria intuizione e creatività formale, la comunità matematica del suo tempo lo ignorò quasi completamente.

Al contrario, Hilbert è il rappresentante più limpido di questa nuova matematica. Il suo ruolo centrale è dovuto sia ai suoi contributi diretti e alla creazione a Göttingen del centro della matematica mondiale, dove insegnò dal 1895 al 1930, sia e soprattutto per essersi interrogato sul nuovo modo di fare matematica guidato dall'esigenza di rigore. Tale esigenza si tradusse nella matematizzazione delle idee intuitive (assiomatizzazione) e lo portò a elaborare il contributo più originale per la giustificazione matematica dell'infinito.

Il lavoro di Hilbert in logica ebbe origine dal suo interesse per le questioni fondazionali e in particolare per i *Fondamenti della geometria* (1899). Questa ricerca sui fondamenti della geometria lo condusse a una concezione delle teorie matematiche come *sistemi formali*. In questa veste, la geometria rinuncia definitivamente a dichiarare la natura degli oggetti che si prendono in considerazione: le verità acquisite hanno origine da assiomi apparentemente privi di qualunque implicazione ontologica. Una teoria matematica di questo tipo sarà per questo chiamata "ipotetico-deduttiva", proprio perché: *i*) alle proposizioni iniziali non si richiede più il carattere dell'evidenza di una realtà osservata, requisito, al contrario, indispensabile per la geometria euclidea; e *ii*) il rigore della teoria poggia interamente sulla struttura e la precisione delle regole

deduttive. In questo modo, la nuova veste formale della geometria e, più in generale, della matematica, è concettualmente continua all'idea di Bernhard Riemann (1826-1866) proposta nell'opera pubblicata dopo la sua morte e intitolata *Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria* (1868). Per Riemann la struttura fondamentale di un ente matematico non è mai assoluta ma è sempre una fra le differenti e possibili proposte alternative.

Date queste premesse, nei sistemi formali era possibile assegnare interpretazioni alle variabili scegliendo *liberamente* il dominio degli oggetti e attribuendo significati *arbitrari* ai predicati di base. L'unico vincolo era che gli assiomi della teoria fossero soddisfatti in quella specifica interpretazione. Prendiamo, ad esempio, un predicato di base come $L(x)$: nella sua interpretazione standard, potrebbe essere letto come "x è una linea" e il suo significato associato all'insieme delle linee nel piano euclideo. Tuttavia, nella visione di Hilbert, lo stesso predicato poteva essere reinterpretato, ad esempio, come un insieme di coppie di numeri reali in un'interpretazione aritmetica della teoria. Il ruolo dei predicati, in questo contesto, è puramente formale. La loro indipendenza da qualsiasi interpretazione specifica è l'elemento chiave, poiché sono gli assiomi a permettere l'esistenza di interpretazioni multiple.

È importante notare che, sebbene in questa fase iniziale l'approccio di Hilbert alla matematica mostrasse già i segni del formalismo che avrebbe caratterizzato i suoi lavori successivi, egli non usò una logica formalizzata. Si basò invece su una logica assunta informalmente come fondamento dei suoi studi assiomatici. Solo dopo essere venuto a conoscenza dei *Principia Mathematica* di Whitehead e Russell, Hilbert iniziò a impiegare e sviluppare in modo sistematico la logica formalizzata. Ne sono prova gli appunti delle lezioni del semestre invernale 1917/1918, intitolate "I principi della matematica". Questa serie di lezioni, che avrebbe poi costituito la base del manuale *Grundzüge der theoretischen logik*, contiene una vasta quantità di materiale, tra cui argomenti di logica proposizionale, predicativa e del secondo ordine (ovvero la teoria dei tipi di Russell e Whitehead), oltre che l'inizio di quella che chiamiamo metateoria (studi di coerenza e completezza per la logica proposizionale, indipendenza degli assiomi, etc.).

Il lavoro di Hilbert è il punto d'arrivo di quella che Casari (1973) descrisse mirabilmente come una vera e propria "rivoluzione assiomatica", poiché contribuì a ridefinire in modo radicale l'organizzazione assiomatica stessa. La sua idea di fondazione ruotava intorno al concetto di *metodo assiomatico*, che egli vedeva come la forma scientifica della conoscenza, non solo per la matematica, ma per ogni campo conoscitivo:

> [...] per una piena sicurezza del contenuto della nostra conoscenza merita la preferenza il metodo assiomatico. (Hilbert 1899)

Per Hilbert, una teoria si dice "assiomatica" o "assiomatizzata" se è rappresentata come una lista di assiomi, da cui tutti i teoremi sono logicamente derivabili, e la teoria si identifica come l'insieme delle conseguenza logiche degli assiomi. Il metodo assio-

matico di Hilbert è ben diverso da quello euclideo poiché le proposizioni primitive (gli assiomi) sono considerate arbitrarie, non nel senso che dipendano dal ghiribizzo del matematico, ma nel senso che non sono giustificate come *proposizioni vere in qualche dominio della realtà*. Il problema era irrilevante per la vecchia assiomatica, in quanto gli assiomi venivano accettati sulla base della loro evidenza e verità e questo era sufficiente per mostrarne la consistenza: se qualcosa è vero, è perciò anche consistente. Al contrario, nel contesto hilbertiano non ci si basa più sul dominio intuitivo e si pone quindi il problema di mostrare che esiste di fatto un'interpretazione del sistema assiomatico che rende gli assiomi veri:

Approccio classico	***Approccio hilbertiano***
Consistenza	Esistenza
⇑	⇑
Verità	*Verità*
⇑	⇑
Esistenza	Consistenza

Naturalmente, il lavoro di assiomatizzazione non finisce con l'enumerazione degli assiomi e lo studio della loro indipendenza. Come evidenzia Hilbert:

> Sorge allora la necessità di mostrare che la non contraddittorietà e la completezza di questi assiomi; cioè si deve mostrare che l'uso degli assiomi fissati non può portare mai a contraddizione e inoltre che il sistema degli assiomi basta per la dimostrazione di tutti i teoremi geometrici. (Hilbert 1899, p. 34)

I problemi sollevati da Hilbert hanno innescato una profonda riflessione epistemologica sui processi giustificativi della matematica, contribuendo a ridefinire il dibattito sui suoi fondamenti. In particolare, al *Congresso Internazionale dei Matematici* di Parigi del 1900, Hilbert presentò una collezione di 23 (+1) problemi fondazionali. Dato che l'oggetto di questo capitolo è la teoria della dimostrazione, merita una menzione particolare il ventiquattresimo problema di Hilbert, che non fu pubblicato nell'elenco ufficiale dei 23 problemi, ma era incluso nelle sue note originali. Il problema chiedeva di trovare un *criterio di semplicità nelle dimostrazioni matematiche* e di sviluppare una teoria della dimostrazione con il potere di stabilire se una data dimostrazione fosse la più semplice possibile. Il 24° problema fu riscoperto dallo storico tedesco Rüdiger Thiele nel 2000, che notò come Hilbert non lo avesse incluso né nella lezione né in alcun testo pubblicato. Dal Congresso di Parigi, Hilbert espresse la sua profonda convinzione che ogni problema matematico avesse una soluzione. Questa idea è racchiusa nella sua celebre frase:

> Questa convinzione della risolvibilità di ogni problema matematico è un potente incentivo per il lavoratore. Sentiamo in noi il richiamo perpetuo: C'è il

> problema. Cercane la soluzione. Puoi trovarla con la pura ragione, perché in matematica non c'è *ignorabimus*. (Hilbert 1900 (1978))

Questa stessa fiducia si ritrova nel suo saggio *Pensiero Assiomatico* (Hilbert 1917 (1978)), dove il problema della "decidibilità di una questione matematica in un numero finito di operazioni" è elencato come uno dei problemi fondamentali del metodo assiomatico.

Un altro problema sollevato da Hilbert al Congresso di Parigi fu quello della coerenza della matematica. La coerenza di vari sistemi geometrici (euclidei e non euclidei) poteva essere dimostrata riducendoli a teorie aritmetiche (intese in senso ampio, includendo i numeri reali e parte della teoria degli insiemi). Tuttavia, il problema rimaneva urgente per le stesse teorie aritmetiche. Questo scenario, insieme alla scoperta dei *Principia Mathematica*, spinse Hilbert a un rinnovato impegno verso teorie completamente formalizzate e il ruolo chiave della non contraddittorietà nelle scienze matematiche[3].

Fino a quel momento tutti davano per scontato che la non contraddittorietà fosse necessaria, ma identificavano questa condizione con l'esistenza di un *modello*. In termini moderni, dato un enunciato φ e un insieme di enunciati Γ supposto non contraddittorio

$$\Gamma \nVdash \varphi \text{ se e solo se } \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ ha un modello}$$

ovvero

$$\Gamma \Vdash \varphi \text{ se e solo se } \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ è contraddittorio}$$

La nozione di conseguenza e quella di non contraddittorietà erano implicitamente di natura semantica, pur mancando una distinzione esplicita tra la conseguenza e la deduzione[4]. Il metodo usato consisteva dunque nel ridurre la non contraddittorietà di una teoria a quella di un'altra, supposta già non contraddittoria, ovvero nel dimostrare la non contraddittorietà della prima relativamente alla seconda attraverso una interpretazione della prima nella seconda; tale metodo deve necessariamente avere un punto di arresto. A fine Ottocento i successivi rimandi hanno portato tutte le teorie classiche a essere dipendenti, per la non contraddittorietà, da quelle dell'aritmetica, o teoria dei numeri naturali.

Fin dal suo celebre discorso del 1900 al Congresso Internazionale dei Matematici a Parigi, l'obiettivo generale di Hilbert fu escludere definitivamente il dubbio della possibilità di contraddizioni nella matematica, richiedendo che le dimostrazioni avessero un carattere finito, e dunque di tipo sintattico-assiomatico. Da quel momento, divenne

[3] A ciò si aggiunse un secondo elemento cruciale: il dibattito sui fondamenti, che raggiunse un punto di crisi a causa delle proposte radicali di Hermann Weyl (1855-1955) e Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966).

[4] Le equivalenze di sopra non erano neanche dimostrate.

chiaro che il destino delle scienze matematiche fosse strettamente legato allo sviluppo della logica matematica: il processo di una *matematica per la logica* coincise con quello di una *logica per la matematica*.

L'acceso dibattito con Brouwer, Weil e Poincaré[5] spinsero Hilbert, all'inzio degli anni '20, a distinguere tre tipi di matematica: la *matematica ordinaria*, la matematica in senso stretto (o *matematica propria*) e la *metamatematica*. La matematica ordinaria è quella praticata dalla comunità dei matematici; la matematica propria è la sua versione completamente formalizzata; mentre la metamatematica è lo studio combinatorio dei segni e delle loro combinazioni. Essa consiste in forme di inferenza epistemologicamente affidabili usate per dimostrare risultati sulla matematica propria. Si tratta della nuova disciplina annunciata nel 1917 e chiamata *teoria della dimostrazione*:

> A questa matematica vera e propria si aggiunge una matematica in un certo senso nuova, una *metamatematica*, che serve per dare sicurezza a quella, proteggendola sia dal terrore dei divieti non necessari che dal travaglio dei paradossi. In questa metamatematica, contrariamente ai metodi puramente formali delle inferenze della matematica vera e propria, viene usato il ragionamento contenutistico, e precisamente per la dimostrazione della non contraddittorietà degli assiomi. (Hilbert 1917 (1968), p. 161)

La necessità del rigore impone non solo la presentazione assiomatica della matematica attuale, ma anche la sua *formalizzazione*, cioè che essa venga rimpiazzata da sistemi formali la cui non contraddittorietà (e completezza) possa essere dimostrata nella metamatematica.

Quando si parla di completezza, è opportuno specificare che si parla sempre di completezza in due sensi: la completezza di un *calcolo logico* e la completezza di una *teoria*. Con completezza logica si intende una proprietà di un calcolo logico, cioè di un sistema di assiomi e regole, la cui nozione di derivabilità $\Gamma \vdash \varphi$ significa che la formula φ è derivabile dalle assunzioni Γ nel calcolo logico fissato, con una successione finita di formule che sono: o assiomi logici, o in Γ, o si ottengono dai precedenti attraverso l'applicazione di una regola logica. Se è data una semantica per il calcolo logico, la *correttezza* del calcolo, come ben sappiamo, è la proprietà che

$$\text{per ogni formula } \varphi \text{ e ogni insieme di formule } \Gamma\text{, se } \Gamma \vdash \varphi \text{ allora } \Gamma \Vdash \varphi,$$

mentre la *completezza* è la proprietà reciproca che

$$\text{per ogni formula } \varphi \text{ e ogni insieme di formule } \Gamma\text{, se } \Gamma \Vdash \varphi \text{ allora } \Gamma \vdash \varphi.$$

[5] Le critiche di Poincaré erano rivolte all'uso che Hilbert fece dell'induzione matematica per dimostrare che nessuna dimostrazione in un certo sistema ha una certa proprietà. Poincaré colse subito questo punto e obiettò alla base dell'approccio di Hilbert ai fondamenti un circolo vizioso, poiché tentare di dimostrare la coerenza dell'aritmetica (che include il principio di induzione) sembrerebbe richiedere un ragionamento per induzione.

Se il calcolo, e la semantica, godono di semplici proprietà, la completezza è equivalente a

per ogni insieme di formule Γ, Γ ha un modello se e solo se Γ è non contraddittorio.

Supponiamo che la logica soggiacente sia completa[6], la completezza, o completezza deduttiva, di una teoria T è la proprietà che

$$\text{per ogni enunciato } \varphi, \text{ o } T \vdash \varphi \text{ o } T \vdash \neg\varphi.$$

Se una teoria T è completa, i suoi modelli hanno la proprietà che in essi sono veri esattamente gli stessi enunciati. Ogni enunciato o è derivabile da T, e allora vale in tutti i modelli di T, oppure è refutabile in T, e allora è falso in tutti i modelli di T. Due strutture che soddisfano esattamente gli stessi enunciati del loro linguaggio si dicono *elementarmente equivalenti*. Una teoria dunque è completa se e solo se i suoi modelli sono tutti tra loro elementarmente equivalenti. Infatti, per ogni enunciato φ, se φ è vero in tutti i modelli, allora è un teorema, per la completezza; se è falso in tutti i modelli la sua negazione è vera in tutti, e per la completezza è un teorema.

I teoremi di una teoria completa sono indistinguibili tra loro. Se una teoria T è completa, per conoscere i suoi teoremi è sufficiente considerare un suo modello M: i teoremi di T sono gli stessi enunciati che sono veri in M. Per una teoria completa T, dato un qualunque enunciato φ, o questo è già un teorema (e quindi $T \cup \{\varphi\}$ è equivalente a T), oppure è incompatibile con T, nel senso che $T \cup \{\varphi\}$ è contraddittoria e $T \vdash \neg\varphi$. Inoltre, una teoria T si dice *categorica* se tutti i suoi modelli sono tra loro *isomorfi*, ovvero se ha un solo modello, a meno di isomorfismi. Due strutture $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono isomorfe se e solo se esiste una corrispondenza biunivoca $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ che conserva le operazioni e le relazioni delle strutture.

All'inizio del Novecento regnava una totale confusione sui concetti di completezza. Questa ambiguità riguardava sia la distinzione tra completezza logica e completezza deduttiva delle teorie, sia il rapporto tra quest'ultima e la categoricità. Un esempio significativo di questa incertezza si trova nell'esposizione di Hilbert al Congresso di Bologna del 1928, dove il problema della completezza deduttiva per la teoria dei numeri naturali viene formulato ancora in termini di categoricità. Il problema della completezza dell'aritmetica consisteva, per Hilbert, nel cercare una versione finitisticamente soddisfacente della categoricità.

Una descrizione completa del programma di Hilbert ci porterebbe troppo lontano. Quello che deve risultare chiaro del nuovo metodo assiomatico sono tre aspetti centrali:

[6] Nello specifico la logica del primo ordine.

1. *Formalizzazione completa*: le teorie matematiche devono essere completamente formalizzate, esplicitando in modo totale sia il linguaggio ammesso che le sue regole di combinazione.
2. *Giustificazione tramite coerenza*: Una teoria non si giustifica più con l'intuizione, ma dimostrando la sua non-contraddittorietà. L'obiettivo è mostrare che non è possibile derivare una dimostrazione che porti a una proposizione e alla sua negazione contemporaneamente.
3. *Metodi finitistici*: Per garantire la validità di questa dimostrazione, è essenziale usare solo metodi *finitistici*, ovvero procedimenti di definizione e dimostrazione che si limitano a un numero finito di passaggi.

Il programma fondazionale di Hilbert richiede, pertanto, la formalizzazione dell'aritmetica, dell'analisi e della teoria degli insiemi (all'inizio degli anni Venti l'attenzione era sull'analisi; in seguito, si sarebbe focalizzata sulla teoria dei numeri). A tale formalizzazione è associata una dimostrazione di coerenza per mezzo della teoria della dimostrazione. Qual è il vantaggio di questo approccio? A differenza degli oggetti infinitari che i matematici spesso invocano, le formule e le dimostrazioni in un sistema formalizzato sono combinazioni finite di simboli. Su queste combinazioni è possibile operare con la certezza di ragionamento richiesta dalle rigorose esigenze finitistiche di Hilbert. La dimostrazione di coerenza agisce così come una garanzia finitistica dell'ammissibilità degli oggetti infinitari considerati nella matematica ordinaria.

In questo contesto, alla maggior parte dei logici sembrava che la totalità delle modalità di ragionamento finitistico potesse essere catturata all'interno di alcuni sistemi ben noti (come l'aritmetica di Peano). Tuttavia, il programma di Hilbert ricevette un duro colpo dai famosi *teoremi di incompletezza* di Gödel. Gödel presentò i risultati finali dei suoi studi dottorali per la prima volta nel settembre del 1930 a Könisberg (e pubblicati nel 1931), durante una importante conferenza sull'*epistemologia e le scienze esatte* organizzata da Rudolf Carnap (1891-1979) e Hans Reichenbach (1891-1953)[7]. In particolare, il primo di questi teoremi sancisce che, nel modello standard dell'aritmetica di Peano, vi è un enunciato vero, ma allo stesso tempo non dimostrabile dalla teoria. In altre parole, il sistema dell'artimetica di Peano non permette di provare tutti gli enunciati che, da un punto di vista semantico, sono veri. La teoria è incompleta poiché esistono enunciati che non sono né dimostrabili né refutabili; tali enunciati si dicono *indecidibili* nella teoria. Il secondo teorema di incompletezza, invece, dimostra l'indimostrabilità della non contraddittorietà di un sistema formale capace di internalizzare i suoi propri mezzi di dimostrazione. La non contraddittorietà della teoria non è dimostrabile con strumenti matematici e logici che non siano più potenti di quelli disponibili nella teoria stessa. Grazie a Gödel, si capisce che, non solo

[7] La conferenza è importante perché da quel momento si consolidò la tradizione storiografica delle tre scuole fondazionali: *logicismo*, *intuizionismo* e *formalismo*. Nell'occasione il logicismo fu presentato da Carnap, l'intuizionismo da Arend Heyting (1896-1980), il più importante allievo di Brouwer, e il formalismo da John von Neumann(1903–1957).

il programma di Hilbert non è stato ancora realizzato, ma che in linea di principio non è possibile farlo, ossia che non è possibile dimostrare con mezzi puramente finitistici la non contraddittorietà del sistema formale della teoria dei numeri naturali.

In questo modo, Gödel dimostrò che nessun sistema consistente, nel quale possa essere sviluppata una quantità minima di aritmetica, può dimostrare la propria coerenza. Ciò significa che, se un sistema contiene tutte le modalità di ragionamento finitistico, nessuna dimostrazione finitistica della sua coerenza può essere data. Il programma di Hilbert ebbe una breve vita, ma svolse un ruolo decisivo, catalizzando la formazione di un ampio spettro di contributi e interessi per lo sviluppo degli strumenti necessari alla sua realizzazione. Se da un lato i risultati *limitativi* di Gödel misero fine al programma metamatematico di dimostrare le proprietà dell'aritmetica, dall'altro aprirono la strada ad approcci alternativi rispetto a quelli di stampo hilbertiano.

Le idee di Hilbert sui fondamenti della matematica e, in particolare, le dimostrazioni di coerenza, furono sviluppate da alcuni dei suoi studenti e collaboratori, specialmente Bernays e Ackermann. Contribuirono anche altri matematici non strettamente legati alla scuola di Hilbert, come von Neumann e Herbrand, che perseguì in modo indipendente il problema della coerenza da una prospettiva diversa. Fu però Gentzen, assistente di Hilbert a Göttingen e allievo di Weyl, a introdurre le principali novità in questo campo negli anni Trenta. A differenza della teoria assiomatica della dimostrazione di Hilbert, che mirava a studiare la coerenza, l'indipendenza e la completezza dei sistemi assiomatici della matematica, la *teoria strutturale della dimostrazione* di Gentzen si concentrò sulla struttura generale e sulle proprietà delle dimostrazioni matematiche.

Nel 1933, nella sua tesi di dottorato, *Untersuchungen über das logische Schliessen*, Gentzen presentò due formulazioni principali di sistemi di regole logiche: la *deduzione naturale* (mirata a una stretta corrispondenza con il modo in cui i teoremi sono dimostrati nella pratica matematica) e il *calcolo dei sequenti*. Nel calcolo dei sequenti Gentzen ottenne il suo risultato principale, noto come "*Hauptsatz*" di Gentzen (*teorema del taglio o della cesura*). Esso afferma che le dimostrazioni possono essere trasformate in una certa forma "senza tagli" (*cut-free*), permettendo di trarre conclusioni generali sulla loro struttura e garantendo la coerenza del sistema di regole.

Il lavoro di Gentzen ha gettato le basi per gran parte della successiva teoria della dimostrazione, stabilendo che il suo calcolo dei sequenti è consistente. L'idea chiave è che, proprio come i sistemi assiomatici possono essere estesi per formalizzare teorie matematiche aggiungendo assiomi, il calcolo dei sequenti può essere usato allo stesso scopo aggiungendo sequenti assiomatici o nuove regole di inferenza. Un elemento fondamentale di questo approccio è proprio il teorema di eliminazione del taglio, il cui valore risiede nella sua natura finitistica. Il teorema permette di dimostrare la coerenza di un sistema attraverso una modifica puramente combinatoria delle dimostrazioni. Se il teorema vale per un dato sistema, ne abbiamo una prova di coerenza.

Quando si aggiungono assiomi al calcolo dei sequenti, come nel caso dell'aritme-

tica, l'eliminazione completa del taglio non è sempre possibile. Se gli assiomi contengono solo formule atomiche, si possono eliminare i tagli su formule complesse, ma quelli su formule atomiche possono rimanere. Nel caso dell'aritmetica di Peano, quasi tutti gli assiomi possono essere formulati come sequenti composti da formule atomiche. L'unica eccezione è l'assioma di induzione, che Gentzen sostituì con una regola di inferenza. Per dimostrare la coerenza dell'aritmetica, è sufficiente mostrare che, in una dimostrazione, tutti i tagli su formule complesse e tutte le applicazioni della regola di induzione possono essere eliminati. Poiché le dimostrazioni derivanti dagli assiomi di Peano che usano solo tagli su formule atomiche non possono portare a contraddizioni, ne consegue che l'aritmetica di Peano è consistente.

Mentre l'obiettivo primario di Hilbert era stato quello di assiomatizzare l'aritmetica, Gentzen spostò l'attenzione sull'analisi di una nozione di deduzione più generale. In questo modo, nel 1936, stabilì la coerenza dell'aritmetica mediante un argomento puramente combinatorio sulla struttura delle dimostrazioni. Sebbene questo risultato sembri contraddire il teorema di incompletezza di Gödel, Gentzen utilizzò un'induzione transfinita fino all'ordinale ϵ_0 di Cantor, una forma di ragionamento che si trova al di fuori dell'aritmetica stessa:

> Nel suo approccio alla teoria della dimostrazione, Hilbert era interessato principalmente alla derivabilità (cioè, se qualcosa fosse derivabile in una certa teoria con certi mezzi). Con Gentzen, raggiungiamo un nuovo livello in cui la teoria della dimostrazione non è più ristretta dall'obiettivo di ridurre le dimostrazioni che usano considerazioni infinitarie a dimostrazioni finitarie. Alcuni logici parlano di teoria della dimostrazione riduttiva per quest'ultimo approccio, caratterizzato dalla visione di Hilbert sulla teoria della dimostrazione. Gentzen riuscì ad espandere l'approccio hilbertiano considerando le dimostrazioni matematiche in sé, le loro trasformazioni, etc., senza essere limitato alle considerazioni delle dimostrazioni come mezzi di una riduzione epistemica. L'approccio di Gentzen fu fondamentale nel passaggio dalla teoria della dimostrazione riduttiva alla teoria generale della dimostrazione. (Prawitz 1971, p. 237, *traduzione nostra*)

Delle due forme di teoria strutturale della dimostrazione che Gentzen presentò nella sua tesi di dottorato, la deduzione naturale è rimasta notevolmente stabile. Il calcolo dei sequenti, invece, si è sviluppato in varie direzioni. Una di queste direzioni, partendo da Gentzen e passando per Ketonen, Kleene, Dragalin e Troelstra, ha portato ai sistemi di calcolo dei sequenti senza contrazione. Ciascuno di questi logici ha aggiunto un contributo essenziale, fino a far emergere ciò che Sara Negri e Jan von Plato definiscono una vera "gemma":

> Cosa sia questa gemma può essere solo accennato in questa fase: esiste un modo di organizzare i principi di dimostrazione tale che si possa partire dal teorema da dimostrare, per poi analizzarlo in parti più semplici in modo guidato. La

> gemma è proprio questo "modo guidato"; vale a dire, se si stabilisce quale sia stata l'ultima regola di inferenza applicata, le premesse di quell'ultimo passo sono determinate in modo univoco. Successivamente, si procede analizzando queste premesse, e così via. La scoperta fondamentale di Gentzen viene riformulata affermando che una dimostrazione può essere organizzata in modo tale che le premesse di ogni passo di inferenza siano sempre più semplici della sua conclusione. (Negri & von Plato 2001, p. XII, *traduzione nostra*)

3.2 Calcolo dei sequenti per la logica proposizionale classica

In questa sezione esamineremo il calcolo dei sequenti di Gentzen LK per la logica proposizionale PK (*Propositional Kalkül*), ampiamente riconosciuto come uno degli algoritmi dimostrativi più eleganti, più agevoli e più rigorosi. Come nel caso dei tableaux analitici per la logica proposizionale, LK è un metodo algoritmico perfetto per la logica degli enunciati: è anch'esso consistente e completo rispetto ala semantica del linguaggio proposizionale discussa nel precedente capitolo. Nella presente sezione, i segni $\alpha, \beta, \gamma, \mu$ (con eventuali indici) sono segni per *formule*, mentre i segni $\Gamma, \Delta, \Sigma, \Theta$ sono segni per *insiemi finiti* di formule.

Definizione 3.1. [Successione di insiemi di formule] Una successione di insiemi di formule Γ, Δ si può intendere, ad arbitrio, come unione degli insiemi o come semplice compresenza degli stessi. Ad esempio, dati gli insiemi $\{\alpha, \beta, \gamma\} = \Gamma$ e $\{\alpha\} = \Delta$, allora Γ, Δ può essere arbitrariamente inteso sia come $\{\alpha, \beta, \gamma\}, \{\alpha\}$, sia come $\{\alpha, \beta, \gamma\} \cup \{\alpha\} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. L'adozione dei concetti di insieme di formule e di successione di insiemi consente di ovviare all'introduzione delle regole strutturali di *contrazione* e di *scambio* (o *permutazione*)[8].

Gli oggetti che considereremo saranno espressioni della forma

$$\Gamma \Rightarrow \Delta$$

dove il cosiddetto *freccione* $\Rightarrow$ è il segno metalinguistico che indica la derivabilità, mentre Γ, Δ sono insiemi finiti, ed eventualmente vuoti, di formule del linguaggio proposizionale. Dunque, un sequente è costituito da un insieme $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ di formule (detto *antecedente*) seguite dal segno $\Rightarrow$, a sua volta seguito da un ulteriore insieme di formule $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ (detto *conseguente* o *succedente*):

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \Rightarrow \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$$

Interpreteremo questa espressione come segue: dalla congiunzione $\bigwedge_{i=1}^{n} \alpha_i$ delle formule in Γ si deriva la disgiunzione $\bigvee_{j=1}^{m} \beta_j$ delle formule in Δ:

[8] Cfr. (Galvan 2015, p. 8).

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \alpha_i \to \bigvee_{j=1}^{m} \beta_j$$

Se Γ, Δ sono entrambe vuote, scriveremo semplicemente $\Rightarrow$ e lo indicheremo *sequente vuoto*. Inoltre, i sequenti

$$\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta, \beta$$

$$\alpha, \Gamma, \Sigma \Rightarrow \Delta, \Theta, \beta$$

sono abbreviazioni delle seguenti espressioni

$$\{\alpha\}, \Gamma \Rightarrow \Delta, \{\beta\}$$

$$\{\alpha\}, \Gamma, \Sigma \Rightarrow \Delta, \Theta, \{\beta\}$$

che possono, in base alla *Definizione 3.1.*, essere anche intese come

$$\{\alpha\} \cup \Gamma \Rightarrow \Delta \cup \{\beta\}$$

$$\{\alpha\} \cup \Gamma \cup \Sigma \Rightarrow \Delta \cup \Theta \cup \{\beta\}$$

Infine, per ragioni di semplificazione grafica, il sequente $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \Rightarrow \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ può essere semplificato eliminando il segno d'insieme nella forma seguente

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \Rightarrow \beta_1, \ldots, \beta_m$$

e pertanto

- $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \Rightarrow \beta_1, \ldots, \beta_m$ ha il significato di $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \Rightarrow \beta_1 \vee \ldots \vee \beta_m$;
- $\Rightarrow \beta_1, \ldots, \beta_m$ ha il significato di $\Rightarrow \beta_1 \vee \ldots \vee \beta_m$;
- $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \Rightarrow$ ha il significato di $\Rightarrow \neg(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$;
- la sequenza vuota $\Rightarrow$ ha il significato di $\Rightarrow \bot$, cioè della derivazione della contraddizione.

Definizione 3.2. [Derivazione $\mathcal{D}$ in LK] Una derivazione $\mathcal{D}$ in LK è un albero radicato, i cui nodi sono sequenti, generato induttivamente da regole operazionali. La radice dell'albero è chiamata *sequente finale* ed è il sequente dimostrato in $\mathcal{D}$ e posto alla "fine" dell'albero. I sottoalberi di una dimostrazione sono chiamati *sottodimostrazioni*; mentre i sequenti iniziali, che etichettano le foglie, sono gli assiomi (o le assunzioni) in $\mathcal{D}$. Scriviamo $\vdash_{\mathrm{LK}} \Gamma \Rightarrow \Delta$ e $\vdash_{\mathrm{LK}} \alpha$ se esiste, rispettivamente, una derivazione $\mathcal{D}$ in LK per $\Gamma \Rightarrow \Delta$ e per $\vdash_{\mathrm{LK}} \emptyset \Rightarrow \alpha$.

Una regola di inferenza è un'espressione della forma

$$\frac{S_1 \quad S_2 \quad \dots \quad S_n}{S}$$

dove S_1 e S_n sono sequenti. I sequenti superiori sono chiamati premesse e il sequente inferiore è chiamato conclusione. La formula distinta nella conclusione è chiamata formula principale. Una regola senza premesse è chiamata assioma. La lettura prevista è dall'alto verso il basso, ovvero: assumendo le premesse, la conclusione è vera.

Le regole di inferenza sono i blocchi costitutivi delle dimostrazioni. In altre parole, ogni regola dovrebbe essere intesa come uno schema di regole che rappresenta molte istanze della regola. Ogni nodo che non è un assioma o un'assunzione, dipenderà dai suoi (al più due) successori sulla base di regole di inferenza. Una derivazione di $\Gamma \Rightarrow \Delta$ in cui ogni foglia è etichettata con un assioma si dirà dimostrazione, e $\Gamma \Rightarrow \Delta$ sarà detta dimostrabile. Inoltre, se $S \cup s$ un insieme di sequenti, ed esiste una derivazione $\mathcal{D}$ di s le cui foglie sono etichettate con assiomi o sequenti in S, scriveremo $S \vdash_{\mathrm{LK}} s$. Se s è dimostrabile, scriveremo semplicemente $\vdash_{\mathrm{LK}} s$.

Il sistema sintattico-assiomatico dei sequenti della logica proposizionale classica è costituito da un insieme di regole che permettono di caratterizzare la relazione intuitiva di inclusione logica tra proposizioni in $\mathcal{L}_0$.

Definizione 3.3. [Sistema assiomatico $\mathbb{L}_0$]

$$\mathbb{L}_0 = (\mathcal{L}_0, \vdash_{\mathrm{LK}})$$

in cui:

- $\mathcal{L}_0$ è il linguaggio della logica proposizionale;
- $\vdash_{\mathrm{LK}}$ sono le regole di derivazione del calcolo dei sequenti di Gentzen LK per la relazione di derivabilità su $\mathcal{L}_0$.

Se l'insieme di formule Γ è una logica proposizionale e $\mathbb{L}_0$ è una sua presentazione in un calcolo dei sequenti, allora

$$\alpha \in \Gamma \quad \text{sse} \quad \vdash_{\mathrm{L}_0} \Rightarrow \alpha$$

L'insieme delle regole di derivazione $\vdash_{\mathrm{LK}}$ è composto da assiomi e regole logiche (o d'inferenza). Più in dettaglio, gli assiomi sono sequenti inziali della forma

$$\alpha \Rightarrow \alpha \text{ (Ax)}$$

Come evidenzia Galvan:

> Si deve iniziare da essi [gli assiomi] per ottenere una prova (derivazione). Essi sono, per così dire, i sequenti che consentono l'accensione del motore inferenziale (Galvan 2015, p. 9).

Per questo motivo, i sequenti iniziali non sono altro che l'esito di una regola generale d'assunzione. Le regole logiche, invece, si dividono in regole strutturali e regole operazionali. Le regole strutturali, non concernono la parte logica di un calcolo ma agiscono sulla struttura di una derivazione. Come lo stesso Gentzen le qualifica:

> Nuove figure inferenziali sono richieste e non possono essere integrate nel nostro sistema d'introduzione e eliminazione; ma abbiamo il vantaggio di essere capaci di riservar loro un posto speciale nel nostro sistema, dato che non si riferiscono a simboli logici, ma meramente alla struttura del sistema. (Gentzen 1969, p. 82, *traduzione nostra*)

Generalmente, abbiamo quattro tipi di regole strutturali: di *contrazione*, di *scambio*, di *indebolimento* e la regola del *taglio* (o *cesura*). Nel nostro calcolo dei sequenti (in linea con Galvan 2015), poiché una successione di insiemi di formule si può arbitrariamente intendere sia come unione degli insiemi sia come semplice compresenza degli stessi, possiamo fare a meno delle regole di contrazione e di scambio. Le regole di indebolimento hanno la seguente forma

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \mathrm{Ws} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha}\ \mathrm{Wd}$$

Le regole di indebolimento (*weakening*) permettono di aggiungere una nuova occorrenza di una formula sia nell'antecedente che nel conseguente di una sequenza. La regola del taglio (*cut*) è invece la seguente

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \mu \quad \mu, \Theta \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Theta \Rightarrow \Delta, \Sigma}\ \mathrm{Cut}$$

La regola del taglio permette di *tagliare* una formula che occorre sia nell'antecedente di una sequenza che nel conseguente di un'altra sequenza. La regola del taglio occuperà un posto di primo piano nella sezione finale di questo capitolo e, dunque, per il momento non la analizziamo oltre. Al contrario delle regole strutturali, le regole operazionali riguardano la parte logica di un calcolo. Com'era il caso per le regole dei tableaux analitici, anche ogni regola logica di un calcolo dei sequenti è associata con una e una sola costante logica: essa può introdurre la costante logica a destra della sequenza, oppure a sinistra della stessa. Nel primo caso è detta regola logica K (per *Konsequenz*) o regola logica d (per *destra*), nel secondo caso è detta regole logica A (per *Antezedens*) o regola logica s (per *sinistra*).

Le regole della negazione sono

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha}{\neg\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \neg\mathrm{s} \qquad \frac{\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\alpha}\ \neg\mathrm{d}$$

Le regole della congiunzione sono

$$\frac{\alpha, \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\alpha \wedge \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta} \wedge\text{s} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \wedge \beta} \wedge\text{d}$$

Le regole della disgiunzione sono

$$\frac{\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\alpha \vee \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta} \vee\text{s} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \alpha, \beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \vee \beta} \vee\text{d}$$

Le regole dell'implicazione sono

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \quad \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\alpha \to \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta} \to\text{s} \qquad \frac{\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta, \beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \to \beta} \to\text{d}$$

Riportiamo di seguito tutte le regole LK in $\mathbb{L}_0$:

Assiomi

$$\alpha \Rightarrow \alpha \text{ (Ax)}$$

Regole Strutturali

Indebolimento sinistra e destra

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{Ws} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha} \text{Wd}$$

Taglio

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \mu \quad \mu, \Theta \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Theta \Rightarrow \Delta, \Sigma} \text{Cut}$$

Regole operazionali

$\neg$ sinistra e destra

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha}{\neg\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta} \neg\text{s} \qquad \frac{\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\alpha} \neg\text{d}$$

$\wedge$ sinistra e destra

$$\frac{\alpha, \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\alpha \wedge \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta} \wedge\text{s} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \wedge \beta} \wedge\text{d}$$

$\vee$ sinistra e destra

$$\frac{\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\alpha \vee \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta} \vee\text{s} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha, \beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \vee \beta} \vee\text{d}$$

$\to$ sinistra e destra

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \quad \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\alpha \to \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta} \to\text{s} \qquad \frac{\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta, \beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \to \beta} \to\text{d}$$

In tutte le regole introdotte, le occorrenze di $\Gamma, \Delta, \Sigma, \Theta$ sono dette *contesti*, le formule che non sono contesti nel conseguente del $\Rightarrow$ sono dette *principali*, mentre le formule che non sono contesti nell'antecedente del $\Rightarrow$ sono dette *ausiliari*. Inoltre, come per il metodo dei tableaux analitici, queste regole codificheranno una infinità di regole con la stessa struttura.

Convenzionalmente, chiameremo regole di inferenza *forti* le regole operazionali e del taglio, mentre *deboli* tutte le rimanenti regole di inferenza. Abbiamo ora tutti gli elementi per definire in modo rigoroso il concetto di prova o derivazione in $\mathbb{L}_0$.

Definizione 3.4. [*Prova in* $\mathbb{L}_0$]. Una prova $\mathcal{P}$ in $\mathbb{L}_0$, fondata sulle regole di derivazione del calcolo dei sequenti di Gentzen LK, è un albero finito di sequenti con un *sequente finale*, costruito induttivamente secondo le seguenti clausole.
Base. Un assioma $\alpha \Rightarrow \alpha$ è una prova in sé: il sequente iniziale coincide con quello finale.

Passo induttivo.
Regole con una sola premessa.
Sia $\mathcal{P}_1$ una prova il cui sequente finale è $\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1$. Se $\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1$ è il sequente superiore di una regola a una sola premessa che ha come conclusione il sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$, allora

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathcal{P}_1}{\vdots}}{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

è una prova con $\Gamma \Rightarrow \Delta$ come sequente finale.

Regole con due premesse.
Siano $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ due prove i cui sequenti finali sono, rispettivamente, $\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1$ e $\Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2$. Se tali sequenti sono i sequenti superiori di una regola a due premesse che ha come conclusione $\Gamma \Rightarrow \Delta$, allora

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathcal{P}_1}{\vdots}}{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1} \qquad \dfrac{\dfrac{\mathcal{P}_2}{\vdots}}{\Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

è una prova con $\Gamma \Rightarrow \Delta$ come sequente finale.

Definizione 3.5. [*Assiomi generali*] Un assioma generale della forma $\alpha, \Gamma, \Delta \Rightarrow \Sigma, \Theta, \alpha$ si ottiene dall'assunzione dell'assioma base $\alpha \Rightarrow \alpha$ e l'uso di successive applicazioni delle regole di Ws e Wd.

Nel seguito useremo i segni $(\mathrm{Ax})^{\mathrm{Wd}}$ e $(\mathrm{Ax})^{\mathrm{Ws}}$ per denotare sequenti iniziali che sono assiomi generali. Diamo ora alcuni esempi di derivazione in LK.

Esempio 3.1. [*Principio di non contraddizione*]

Dimostrazione.

$$\Rightarrow \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \Rightarrow \alpha \quad \text{(Ax)}}{\alpha, \neg\alpha \Rightarrow}\,\neg\text{s}}{\alpha \wedge \neg\alpha \Rightarrow}\,\wedge\text{s}}{\Rightarrow \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)}\,\neg\text{d}$$

□

Esempio 3.2. [*Principio del terzo escluso*]

Dimostrazione.

$$\Rightarrow \alpha \vee \neg\alpha$$

$$\dfrac{\dfrac{\alpha \Rightarrow \alpha \quad \text{(Ax)}}{\Rightarrow \alpha, \neg\alpha}\,\neg\text{d}}{\Rightarrow \alpha \vee \neg\alpha}\,\vee\text{d}$$

□

Esempio 3.3.. [*Idempotenza della congiunzione*]

Dimostrazione.

$$\Rightarrow \alpha \wedge \alpha \rightarrow \alpha$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \Rightarrow \alpha \quad \text{(Ax)}}{\alpha, \alpha \Rightarrow \alpha}\,\text{Ws}}{\alpha \wedge \alpha \Rightarrow \alpha}\,\wedge\text{s}}{\Rightarrow \alpha \wedge \alpha \rightarrow \alpha}\,\rightarrow\text{d}$$

□

Esempio 3.4. [*Prima legge di De Morgan*]

Dimostrazione.

$$\Rightarrow \neg\alpha \wedge \neg\beta \rightarrow \neg(\alpha \vee \beta)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \Rightarrow \alpha \quad \text{(Ax)}}{\alpha, \neg\alpha \Rightarrow}\,\neg\text{s}}{\neg\beta, \alpha, \neg\alpha \Rightarrow}\,\text{Ws} \qquad \dfrac{\dfrac{\beta, \Rightarrow \beta \quad \text{(Ax)}}{\beta, \neg\beta \Rightarrow}\,\neg\text{s}}{\neg\alpha, \beta, \neg\beta \Rightarrow}\,\text{Ws}}{\neg\alpha, \neg\beta, \alpha \vee \beta \Rightarrow}\,\vee\text{s}}{\neg\alpha \wedge \neg\beta, \alpha \vee \beta \Rightarrow}\,\wedge\text{s}}{\neg\alpha \wedge \neg\beta \Rightarrow \neg(\alpha \vee \beta)}\,\neg\text{d}}{\Rightarrow \neg\alpha \wedge \neg\beta \rightarrow \neg(\alpha \vee \beta)}\,\rightarrow\text{d}$$

□

Esempio 3.5. [*Seconda legge di De Morgan*]

Dimostrazione.

$$\Rightarrow \neg(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \neg\alpha \vee \neg\beta$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \Rightarrow \alpha \quad (\mathrm{Ax})}{\beta, \alpha \Rightarrow \alpha}\,\mathrm{Ws} \qquad \dfrac{\beta \Rightarrow \beta \quad (\mathrm{Ax})}{\alpha, \beta \Rightarrow \beta}\,\mathrm{Ws}}{\alpha, \beta \Rightarrow \alpha \wedge \beta}\,\wedge\mathrm{d}}{\Rightarrow \alpha \wedge \beta, \neg\alpha, \neg\beta}\,\neg\mathrm{d}}{\neg(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \neg\alpha, \neg\beta}\,\neg\mathrm{s}}{\neg(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \neg\alpha \vee \neg\beta}\,\vee\mathrm{d}}{\Rightarrow \neg(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \neg\alpha \vee \neg\beta}\,\rightarrow\mathrm{d}$$

□

Esempio 3.6. [*Doppia negazione (classica)*]

Dimostrazione.

$$\neg\neg\alpha \Rightarrow \alpha$$

$$\dfrac{\dfrac{\alpha \Rightarrow \alpha \quad (\mathrm{Ax})}{\Rightarrow \alpha, \neg\alpha}\,\neg\mathrm{d}}{\neg\neg\alpha \Rightarrow \alpha}\,\neg\mathrm{s}$$

□

Esempio 3.7. [*Legge del Modus Ponens*]

Dimostrazione.

$$\alpha \rightarrow \beta, \alpha \Rightarrow \beta$$

$$\dfrac{\alpha \Rightarrow \alpha, \beta \quad (\mathrm{Ax})^{\mathrm{Wd}} \qquad \beta \Rightarrow \beta \quad (\mathrm{Ax})}{\alpha \rightarrow \beta, \alpha \Rightarrow \beta}\,\rightarrow\mathrm{s}$$

□

Esempio 3.8. [*Legge di transitività dell'implicazione*]

Dimostrazione.

$$\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma \Rightarrow \alpha \rightarrow \gamma$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \Rightarrow \alpha, \beta\ (\mathrm{Ax})^{\mathrm{Wd}} \quad \beta \Rightarrow \beta\ (\mathrm{Ax})}{\alpha \rightarrow \beta, \alpha \Rightarrow \beta}\,\rightarrow\mathrm{s} \qquad \dfrac{\beta \Rightarrow \beta, \gamma\ (\mathrm{Ax})^{\mathrm{Wd}} \quad \gamma \Rightarrow \gamma\ (\mathrm{Ax})}{\beta \rightarrow \gamma, \beta \Rightarrow \gamma}\,\rightarrow\mathrm{s}}{\alpha \rightarrow \beta, \alpha, \beta \rightarrow \gamma \Rightarrow \gamma}\,\mathrm{Cut}}{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma \Rightarrow \alpha \rightarrow \gamma}\,\rightarrow\mathrm{d}$$

□

3.3 Metateoremi

Sviluppiamo ora alcune considerazioni di *carattere strutturale* sul calcolo dei sequenti LK per PK. Tutte le regole di LK, ad eccezione della regola del taglio, hanno una formula principale o ausiliare che occorre nella conclusione; mentre, ogni regola (escluso l'indebolimento), presenta una o più formule ausiliari nelle premesse. Notiamo, inoltre, che in ogni regola di LK, a parte il taglio, le formule nelle premesse sono *sottoformule* delle formule nella conclusione. Queste considerazioni ci permettono di enunciare il seguente teorema.

Teorema 3.1. [*Proprietà della sottoformula*] Se $\mathcal{P}$ è una prova o dimostrazione senza taglio, allora ogni formula che occorre in $\mathcal{P}$ è sottoformula di una formula nel sequente finale dell'albero.

Il teorema stabilisce che, in ogni prova senza tagli $\mathcal{P}$ in LK, ogni formula che compare nelle premesse è una sottoformula di una delle formule che compare nella conclusione. In altri termini, in ogni dimostrazione di LK per PK senza tagli, le informazioni contenute nelle foglie permangono nella conclusione. Il calcolo LK soddisfa questa importante proprietà perché ogni teorema in esso dimostrabile possiede una derivazione tale che ogni formula che vi occorre è una sottoformula della formula che compare nella conclusione.

Definizione 3.6. [*Formula associata*] Dato un sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ tale che $\bigwedge \Gamma \Vdash \bigvee \Delta$, la sua formula *associata* è l'implicazione

$$\bigwedge_{\alpha \in \Gamma} \alpha \ \rightarrow \ \bigvee_{\beta \in \Delta} \beta$$

Definizione 3.7. [*Sequente valido*] Un sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è detto *valido* se il suo conseguente è una conseguenza logica del suo antecedente $\bigwedge \Gamma \Vdash \bigvee \Delta$, o equivalentemente, un sequente è valido se e solo se la sua formula associata $\bigwedge_{\alpha \in \Gamma} \alpha \ \rightarrow \ \bigvee_{\beta \in \Delta} \beta$ è una tautologia. Inoltre, diremo che una valutazione Booleana v *soddisfa* un sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ se v rende vera la sua formula associata $v(\bigwedge_{\alpha \in \Gamma} \alpha \ \rightarrow \ \bigvee_{\beta \in \Delta} \beta) = 1$.

Osservazione 3.1. Un sequente della forma $\Rightarrow \ \alpha$ è valido se e solo se α è una tautologia.

Riprendiamo ora alcune nozioni semantiche della logica proposizionale classica che ci serviranno per la dimosrazione dei teoremi di correttezza e completezza per il calcolo dei sequenti in PK. Come sappiamo, in base all'*Osservazione 2.1.*, la nozione di valutazione Booleana può essere formulata sull'aritmetica dei valori di verità come segue

- $v(\neg\alpha) = 1 - v(\alpha)$;
- $v(\alpha \wedge \beta) = \min(v(\alpha), v(\beta))$;

- $v(\alpha \vee \beta) = \max(v(\alpha), v(\beta))$;
- $v(\alpha \to \beta) = \max(1 - v(\alpha), v(\beta))$.

Osserviamo che, dalla *Definizione 2.19.*, $v(\alpha \to \beta) = 1$ se e solo se $v(\alpha) = 0$ o $v(\beta) = 1$, ovvero se e solo se $v(\alpha) \leq v(\beta)$. Estendendo le valutazioni al sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ avremo

- $v(\bigwedge \Gamma) \equiv \min(v(\alpha))$ per ogni formula $\alpha \in \Gamma$;
- $v(\bigvee \Delta) \equiv \max(v(\beta))$ per ogni formula $\beta \in \Delta$.

Definizione 3.8. [*Sequente refutabile*] Un sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è *refutabile* se esiste una valutazione v tale che $v(\bigwedge \Gamma) > v(\bigvee \Delta)$.

Naturalmente, un sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è valido se non è refutabile, ovvero se non esiste una valutazione della sua formula associata $v(\bigwedge_{\alpha \in \Gamma} \alpha \quad \to \quad \bigvee_{\beta \in \Delta} \beta) = 0$. Dalle definizioni precedenti segue che $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è valido se per ogni valutazione v,

$$v(\bigwedge \Gamma) \leq v(\bigvee \Delta)$$

Per dimostrare la correttezza di LK in PK, abbiamo inoltre bisogno del seguente lemma

Lemma 3.1. Data una valutazione v, $\min(v(\alpha), v(\beta)) \leq v(\gamma)$ se e solo se $v(\alpha) \leq v(\beta \to \gamma)$.

Dimostrazione. Se $v(\alpha) = 0$ l'affermazione è banalmente valida. Se $\min(v(\alpha), v(\beta)) = v(\beta)$, allora $\min(v(\alpha), v(\beta)) \leq v(\gamma)$ se e solo se $v(\beta) \leq v(\gamma)$ e, quindi, se e solo se $v(\beta \to \gamma) = 1$, i.e. $v(\alpha) \leq v(\beta \to \gamma)$.

□

Corollario 3.1. $\min(v(\alpha \to \beta), v(\alpha)) \leq v(b)$.

Dimostrazione. Immediata dal *Lemma 3.1.*

□

Definizione 3.9. [*Legge Distributiva*] Siano $v(\alpha)$, $v(\beta)$ e $v(\gamma)$ i valori di verità di tre formule proposizionali. L'operatore di congiunzione $\min$ si distribuisce sull'operatore di disgiunzione $\max$ secondo la seguente proprietà:

$$\min(\max(v(\alpha), v(\beta)), \max(v(\alpha), v(\gamma))) = \max(v(\alpha), \min(v(\beta), v(\gamma)))$$

Questa legge è una proprietà fondamentale che riflette la dualità tra congiunzione e disgiunzione nell'algebra booleana.

Teorema 3.2. [*Teorema di correttezza per* LK *in* PK]. Se un sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è derivabile in LK allora è valido

$$\Gamma \Rightarrow \Delta \text{ allora } \bigwedge \Gamma \Vdash \bigvee \Delta, \text{ i.e. } \Gamma \Rightarrow \Delta \text{ allora } v(\bigwedge \Gamma) \leq v(\bigvee \Delta)$$

Dimostrazione. Assumiamo che $\Gamma \Rightarrow \Delta$ sia derivabile e proviamo per induzione sulla lunghezza della derivazione che è anche valido.

Caso Base (Ax): se il sequente è un assioma del tipo

$$\alpha \Rightarrow \alpha$$

allora per ogni valutazione v, il valore dell'antecedente è $v(\bigwedge \alpha) = v(\alpha)$, e il valore del conseguente è $v(\bigvee \alpha) = v(\alpha)$. Poiché la condizione di validità è $v(\bigwedge \Gamma) \leq v(\bigvee \Delta)$, abbiamo $v(\alpha) \leq v(\alpha)$, che è banalmente vero. Pertanto, ogni assioma è valido.

Regole Strutturali

– (Ws): se l'ultima regola è

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

per ipotesi induttiva, la premessa è valida, ovvero $v(\bigwedge \Gamma) \leq v(\bigvee \Delta)$ per ogni valutazione v. Dobbiamo dimostrare la validità della conclusione, cioè

$$v(\bigwedge(\alpha, \Gamma)) \leq v(\bigvee \Delta)$$

Espandendo l'antecedente della conclusione, otteniamo $v(\bigwedge(\alpha, \Gamma)) = \min(v(\alpha), v(\bigwedge \Gamma))$. Poiché per definizione di $\min$ abbiamo $\min(v(\alpha), v(\bigwedge \Gamma)) \leq v(\bigwedge \Gamma)$, e per ipotesi induttiva $v(\bigwedge \Gamma) \leq v(\bigvee \Delta)$, la disuguaglianza si mantiene per la proprietà transitiva: $\min(v(\alpha), v(\bigwedge \Gamma)) \leq v(\bigwedge \Gamma) \leq v(\bigvee \Delta)$. Quindi, la conclusione è valida.

– (Wd): se l'ultima regola è

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha}$$

per ipotesi induttiva, la premessa è valida, ovvero $v(\bigwedge \Gamma) \leq v(\bigvee \Delta)$. Dobbiamo dimostrare la validità della conclusione, cioè $v(\bigwedge \Gamma) \leq v(\bigvee(\Delta, \alpha))$. Espandendo il conseguente, otteniamo $v(\bigvee(\Delta, \alpha)) = \max(v(\bigvee \Delta), v(\alpha))$. Poiché per definizione di $\max$ abbiamo $v(\bigvee \Delta) \leq \max(v(\bigvee \Delta), v(\alpha))$, e per ipotesi induttiva $v(\bigwedge \Gamma) \leq v(\bigvee \Delta)$, la disuguaglianza si mantiene per la proprietà transitiva: $v(\bigwedge \Gamma) \leq v(\bigvee \Delta) \leq \max(v(\bigvee \Delta), v(\alpha))$. Quindi, la conclusione è valida.

Regole Logiche

– ($\neg$s): se l'ultima regola è

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha}{\neg\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

per ipotesi induttiva, $v(\bigwedge \Gamma) \leq v(\bigvee(\Delta, \alpha))$. Espandendo il conseguente, otteniamo $v(\bigwedge \Gamma) \leq \max(v(\bigvee \Delta), v(\alpha))$. Dobbiamo dimostrare che la conclusione è valida, ovvero che $v(\bigwedge(\neg\alpha, \Gamma)) \leq v(\bigvee \Delta)$. Espandendo l'antecedente della conclusione,

abbiamo $\min(v(\neg\alpha), v(\bigwedge\Gamma)) = \min(1 - v(\alpha), v(\bigwedge\Gamma))$. Per dimostrare la validità della conclusione, consideriamo due casi per una generica valutazione v:

1. $v(\alpha) = 1$. L'antecedente della conclusione diventa $\min(1-1, v(\bigwedge\Gamma)) = \min(0, v(\bigwedge\Gamma)) = 0$. Poiché $0 \leq v(\bigvee\Delta)$ è sempre vero, la conclusione è valida.
2. $v(\alpha) = 0$. L'antecedente della conclusione diventa $\min(1-0, v(\bigwedge\Gamma)) = \min(1, v(\bigwedge\Gamma)) = v(\bigwedge\Gamma)$. L'ipotesi induttiva si semplifica in $v(\bigwedge\Gamma) \leq \max(v(\bigvee\Delta), 0) = v(\bigvee\Delta)$. Poiché questo è esattamente ciò che dobbiamo dimostrare per la conclusione, la validità è garantita direttamente dall'ipotesi induttiva.

– ($\neg$d): se l'ultima regola è

$$\frac{\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\alpha}$$

per ipotesi induttiva, $v(\bigwedge(\alpha, \Gamma)) = \min(v(\alpha), v(\bigwedge\Gamma)) \leq v(\bigvee\Delta)$. Dobbiamo mostrare che $v(\bigwedge\Gamma) \leq v(\bigvee(\Delta, \neg\alpha)) = \max(v(\bigvee\Delta), v(\neg\alpha))$. Se $v(\bigwedge\Gamma)$ non fosse minore o uguale a $\max(v(\bigvee\Delta), v(\neg\alpha))$, allora $v(\bigwedge\Gamma)$ dovrebbe essere maggiore di entrambi. Se $v(\bigwedge\Gamma) > v(\bigvee\Delta)$ e $v(\bigwedge\Gamma) > v(\neg\alpha)$, allora $v(\bigwedge\Gamma) > 1 - v(\alpha)$, ovvero $v(\alpha) > 1 - v(\bigwedge\Gamma)$. Combinando questo con l'ipotesi induttiva $\min(v(\alpha), v(\bigwedge\Gamma)) \leq v(\bigvee\Delta)$, otteniamo una contraddizione, poiché $v(\bigwedge\Gamma) \leq v(\bigvee\Delta)$ e $v(\alpha) \leq v(\bigvee\Delta)$ non possono essere entrambi veri se $v(\bigwedge\Gamma) > v(\bigvee\Delta)$. Quindi il sequente è valido.

– ($\wedge$s): se l'ultima regola è

$$\frac{\alpha, \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\alpha \wedge \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

per ipotesi induttiva, $v(\bigwedge(\alpha, \beta, \Gamma)) \leq v(\bigvee\Delta)$. Dobbiamo dimostrare che $v(\bigwedge(\alpha \wedge \beta, \Gamma)) \leq v(\bigvee\Delta)$. Ma poiché $v(\bigwedge(\alpha \wedge \beta, \Gamma)) = \min(v(\alpha \wedge \beta), v(\bigwedge\Gamma)) = \min(\min(v(\alpha), v(\beta)), v(\bigwedge\Gamma)) = v(\bigwedge(\alpha, \beta, \Gamma))$, la regola è valida.

– ($\wedge$d): se l'ultima regola è

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \wedge \beta}$$

l'obiettivo è dimostrare, come sempre, che se le premesse sono valide, allora anche la conclusione è valida. Per ipotesi induttiva, le due premesse sono valide per ogni valutazione

1. $v(\bigwedge\Gamma) \leq v(\bigvee(\Delta, \alpha)) = \max(v(\bigvee\Delta), v(\alpha))$
2. $v(\bigwedge\Gamma) \leq v(\bigvee(\Delta, \beta)) = \max(v(\bigvee\Delta), v(\beta))$

Poiché $v(\bigwedge\Gamma)$ è minore o uguale a entrambe le espressioni a destra, deve essere minore o uguale al loro valore minimo. Quindi, possiamo combinare le due premesse in un'unica disuguaglianza:

$$v(\bigwedge\Gamma) \leq \min(\max(v(\bigvee\Delta), v(\alpha)), \max(v(\bigvee\Delta), v(\beta)))$$

Applicando la legge distributiva dei valori logici (il $\min$ si distribuisce sul $\max$, ovvero $\min(\max(x, y), \max(x, z)) = \max(x, \min(y, z))$), l'espressione a destra della disuguaglianza diventa:

$$\max(v(\bigvee \Delta), \min(v(\alpha), v(\beta)))$$

Per la semantica della congiunzione, sappiamo che $\min(v(\alpha), v(\beta)) = v(\alpha \wedge \beta)$. Sostituendo, otteniamo:

$$\max(v(\bigvee \Delta), v(\alpha \wedge \beta))$$

Questa espressione è esattamente $v(\bigvee(\Delta, \alpha \wedge \beta))$, che è il criterio di validità per il sequente conclusivo. Poiché la validità si conserva da premesse a conclusione, la regola è valida.

– ($\vee$s): se l'ultima regola è

$$\frac{\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\alpha \vee \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

per ipotesi induttiva, le due premesse sono valide per ogni valutazione v

1. $v(\bigwedge(\alpha, \Gamma)) \leq v(\bigvee \Delta)$
2. $v(\bigwedge(\beta, \Gamma)) \leq v(\bigvee \Delta)$

Espandendo le premesse in termini di operatori logici, abbiamo

1. $\min(v(\alpha), v(\bigwedge \Gamma)) \leq v(\bigvee \Delta)$
2. $\min(v(\beta), v(\bigwedge \Gamma)) \leq v(\bigvee \Delta)$

Dobbiamo dimostrare che la conclusione è valida, ovvero che

$$v(\bigwedge(\alpha \vee \beta, \Gamma)) \leq v(\bigvee \Delta)$$

Espandendo l'antecedente della conclusione otteniamo

$$v(\bigwedge(\alpha \vee \beta, \Gamma)) = \min(v(\alpha \vee \beta), v(\bigwedge \Gamma)) = \min(\max(v(\alpha), v(\beta)), v(\bigwedge \Gamma))$$

Ora applichiamo la legge distributiva dei valori logici ($\min$ su $\max$), che stabilisce che $\min(x, \max(y, z)) = \max(\min(x, y), \min(x, z))$

$$\min(\max(v(\alpha), v(\beta)), v(\bigwedge \Gamma)) = \max(\min(v(\alpha), v(\bigwedge \Gamma)), \min(v(\beta), v(\bigwedge \Gamma)))$$

Per le nostre ipotesi induttive, sappiamo che entrambi i termini nel $\max$ sono minori o uguali a $v(\bigvee \Delta)$. Di conseguenza, il loro massimo sarà anch'esso minore o uguale a $v(\bigvee \Delta)$.

$$\max(\min(v(\alpha), v(\bigwedge \Gamma)), \min(v(\beta), v(\bigwedge \Gamma))) \leq v(\bigvee \Delta)$$

poiché la disuguaglianza finale è soddisfatta, la conclusione è valida e la regola preserva la correttezza.

– ($\vee$d): se l'ultima regola è

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha, \beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \vee \beta}$$

Per ipotesi induttiva

$$v(\bigwedge \Gamma) \leq v(\bigvee(\Delta, \alpha, \beta))$$

Ora, consideriamo il conseguente del sequente conclusivo. Usando la semantica della disgiunzione e le definizioni di $\bigvee$ e $\max$, possiamo riscriverlo come segue

$$v(\bigvee(\Delta, \alpha \vee \beta)) = \max(v(\bigvee \Delta), v(\alpha \vee \beta)) = \max(v(\bigvee \Delta), \max(v(\alpha), v(\beta)))$$

Per la proprietà di associatività dell'operatore $\max$, l'espressione è equivalente a

$$\max(v(\bigvee \Delta), v(\alpha), v(\beta)) = v(\bigvee(\Delta \cup \{\alpha, \beta\}))$$

Poiché abbiamo dimostrato che il conseguente della conclusione è semanticamente equivalente al conseguente della premessa, e per ipotesi induttiva l'antecedente della premessa è minore o uguale al suo conseguente, ne consegue che $v(\bigwedge \Gamma) \leq v(\bigvee(\Delta, \alpha \vee \beta))$. Pertanto, la conclusione è valida e la regola preserva la correttezza.

– ($\rightarrow$s): se l'ultima regola è

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \quad \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\alpha \rightarrow \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

l'obiettivo è dimostrare che se le due premesse sono valide, anche la conclusione lo è. Assumiamo per *assurdo* che la conclusione sia non valida. Ciò significa che deve esistere una valutazione v tale che l'antecedente della conclusione è vero e il conseguente è falso. In termini di valori di verità, questo si traduce in

1. $v(\bigwedge(\alpha \rightarrow \beta, \Gamma)) = 1$
2. $v(\bigvee \Delta) = 0$

Dalla condizione (1), abbiamo che $\min(v(\alpha \rightarrow \beta), v(\bigwedge \Gamma)) = 1$. Ciò implica che $v(\alpha \rightarrow \beta) = 1$ e $v(\bigwedge \Gamma) = 1$. Ora, usiamo queste informazioni per contraddire le nostre ipotesi induttive. Le due premesse valide sono:

1. $v(\bigwedge \Gamma) \leq v(\bigvee(\Delta, \alpha)) = \max(v(\bigvee \Delta), v(\alpha))$
2. $v(\bigwedge(\beta, \Gamma)) \leq v(\bigvee \Delta) = \min(v(\beta), v(\bigwedge \Gamma)) \leq v(\bigvee \Delta)$

Analizziamo la prima premessa. Sostituendo i valori che abbiamo assunto, otteniamo $1 \leq \max(0, v(\alpha))$. Ciò implica che $v(\alpha) = 1$. Analizziamo la seconda premessa. Sostituendo i valori, abbiamo $\min(v(\beta), 1) \leq 0$. Ciò implica che $v(\beta) = 0$. Infine, torniamo alla nostra assunzione che $v(\alpha \to \beta) = 1$. Il valore di verità di $\alpha \to \beta$ è $\max(1 - v(\alpha), v(\beta))$. Sostituendo i valori che abbiamo trovato, $v(\alpha) = 1$ e $v(\beta) = 0$, otteniamo $v(\alpha \to \beta) = \max(1 - 1, 0) = 0$. Questo è in diretta contraddizione con la nostra assunzione iniziale. Poiché l'assunzione di non validità della conclusione porta a una contraddizione, tale assunzione deve essere falsa. Pertanto, la conclusione è valida.

– ($\to$d): se l'ultima regola è

$$\frac{\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta, \beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \to \beta}$$

l'obiettivo è dimostrare che se la premessa è valida, anche la conclusione lo è. Per ipotesi induttiva, per ogni valutazione v

$$v(\bigwedge(\alpha, \Gamma)) \leq v(\bigvee(\Delta, \beta))$$

ovvero

$$\min(v(\alpha), v(\bigwedge \Gamma)) \leq \max(v(\bigvee \Delta), v(\beta))$$

Dobbiamo dimostrare che la conclusione è valida, ovvero che

$$v(\bigwedge \Gamma) \leq v(\bigvee(\Delta, \alpha \to \beta)) = \max(v(\bigvee \Delta), v(\alpha \to \beta))$$

Consideriamo due casi per una generica valutazione v:

1. $v(\bigwedge \Gamma) \leq v(\bigvee \Delta)$. In questo caso, la conclusione è banalmente valida, poiché $v(\bigwedge \Gamma) \leq v(\bigvee \Delta) \leq \max(v(\bigvee \Delta), v(\alpha \to \beta))$.
2. $v(\bigwedge \Gamma) > v(\bigvee \Delta)$. Dall'ipotesi induttiva, $\min(v(\bigwedge \Gamma), v(\alpha)) \leq \max(v(\bigvee \Delta), v(\beta))$. Poiché $v(\bigwedge \Gamma) > v(\bigvee \Delta)$, deve essere $\min(v(\bigwedge \Gamma), v(\alpha)) \leq v(\beta)$. Dalla definizione di $\to$, sappiamo che $v(\alpha \to \beta) = \max(1 - v(\alpha), v(\beta))$. Se $\min(v(\bigwedge \Gamma), v(\alpha)) \leq v(\beta)$, allora il *Lemma 3.1.* garantisce che $v(\bigwedge \Gamma) \leq v(\alpha \to \beta)$. A fortiori, $v(\bigwedge \Gamma) \leq \max(v(\bigvee \Delta), v(\alpha \to \beta))$.

In entrambi i casi, la conclusione è valida e la regola preserva la correttezza.

– (Cut): se l'ultima regola è

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \mu \quad \mu, \Theta \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Theta \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

L'obiettivo è dimostrare che se le due premesse sono valide, allora anche la conclusione è valida. Per ipotesi induttiva, le premesse sono valide per ogni valutazione v. Ciò significa che:

1. $v(\bigwedge \Gamma) \leq v(\bigvee(\Delta, \mu))$, ovvero $v(\bigwedge \Gamma) \leq \max(v(\bigvee \Delta), v(\mu))$
2. $v(\bigwedge(\mu, \Theta)) \leq v(\bigvee \Sigma)$, ovvero $\min(v(\mu), v(\bigwedge \Theta)) \leq v(\bigvee \Sigma)$

Dobbiamo dimostrare che la conclusione è valida per ogni valutazione v, ovvero che

$$v(\bigwedge(\Gamma, \Theta)) \leq v(\bigvee(\Delta, \Sigma))$$

ovvero

$$min(v(\bigwedge \Gamma), v(\bigwedge \Theta)) \leq \max(v(\bigvee \Delta), v(\bigvee \Sigma))$$

Consideriamo i due casi possibili basati sul valore di verità della formula di taglio μ:

Caso 1: $v(\mu) = 0$. Se $v(\mu) = 0$, l'ipotesi induttiva (1) si semplifica in:

$$v(\bigwedge \Gamma) \leq \max(v(\bigvee \Delta), 0), \text{ ovvero } v(\bigwedge \Gamma) \leq v(\bigvee \Delta)$$

Per dimostrare la validità della conclusione, utilizziamo la transitività delle disuguaglianze. Poiché $\min(v(\bigwedge \Gamma), v(\bigwedge \Theta)) \leq v(\bigwedge \Gamma)$ e $v(\bigvee \Delta) \leq \max(v(\bigvee \Delta), v(\bigvee \Sigma))$, possiamo concatenare le disuguaglianze come segue:

$$\min(v(\bigwedge \Gamma), v(\bigwedge \Theta)) \leq v(\bigwedge \Gamma) \leq v(\bigvee \Delta) \leq \max(v(\bigvee \Delta), v(\bigvee \Sigma))$$

La conclusione è quindi valida.

Caso 2: $v(\mu) = 1$. Se $v(\mu) = 1$, l'ipotesi induttiva (2) si semplifica in:

$$\min(v(\bigwedge \Theta), 1) \leq v(\bigvee \Sigma) \text{ ovvero } v(\bigwedge \Theta) \leq v(\bigvee \Sigma)$$

Anche in questo caso, per dimostrare la validità della conclusione, usiamo la transitività. Poiché $\min(v(\bigwedge \Gamma), v(\bigwedge \Theta)) \leq v(\bigwedge \Theta)$ e $v(\bigvee \Sigma) \leq \max(v(\bigvee \Delta), v(\bigvee \Sigma))$, otteniamo:

$$\min(v(\bigwedge \Gamma), v(\bigwedge \Theta)) \leq v(\bigwedge \Theta) \leq v(\bigvee \Sigma) \leq \max(v(\bigvee \Delta), v(\bigvee \Sigma))$$

La conclusione è valida anche in questo caso. Poiché la validità della conclusione è dimostrata in ogni caso, il teorema di correttezza vale anche per la regola del taglio.

Abbiamo dunque dimostrato che il calcolo dei sequenti LK in PK è corretto, ossia ogni sequente dimostrato in LK è una tautologia.

□

Teorema 3.3. [*Teorema di completezza per* LK *in* PK] Se un sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è valido, allora è derivabile in LK

$$\bigwedge \Gamma \Vdash \bigvee \Delta \quad \text{allora} \quad \Gamma \Rightarrow \Delta$$

Dimostrazione. Per dimostrare questo teorema, procediamo per *contronominale*: se un sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ non è derivabile in LK, allora non è valido. La dimostrazione è costruttiva e si basa sulla ricerca di una derivazione per il sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ tramite la costruzione di un albero di prova "rovesciato", applicando le regole di LK all'indietro partendo dal sequente finale. La *proprietà della sottoformula* (*Teorema 3.1.*) garantisce che questo processo termini, producendo un albero finito. Se il sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ non è derivabile, significa che la costruzione dell'albero di prova non termina con una dimostrazione completa. Esiste quindi almeno un ramo dell'albero che non si chiude. Un ramo è chiuso se il suo sequente-foglia è un assioma del tipo $\alpha \Rightarrow \alpha$. Un ramo non si chiude se il suo sequente-foglia, diciamo $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$, non è un assioma. Se un sequente-foglia non è un assioma, significa che non esiste nessuna formula atomica che appare sia in Γ_0 che in Δ_0, ovvero $\Gamma_0 \cap \Delta_0 = \emptyset$. Il nostro obiettivo è costruire una valutazione booleana v che refuti il sequente iniziale $\Gamma \Rightarrow \Delta$. La valutazione v sarà costruita a partire dal sequente-foglia non chiuso $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$.

Costruzione della valutazione refutante v: per ogni variabile proposizionale p

- se p appartiene all'insieme Γ_0, poniamo $v(p) = 1$;
- se p appartiene all'insieme Δ_0, poniamo $v(p) = 0$.

Questa definizione è consistente perché, come notato, Γ_0 e Δ_0 sono insiemi disgiunti. Per le variabili proposizionali che non appaiono in Γ_0 o Δ_0, la loro valutazione può essere arbitraria.

Dimostrazione per induzione sulla struttura delle formule: Dimostriamo ora per induzione che per ogni sequente $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$ nel ramo non chiuso, la valutazione v soddisfa $v(\bigwedge \Gamma') = 1$ e $v(\bigvee \Delta') = 0$.

Base dell'induzione: Per il sequente-foglia $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$, per costruzione di v, abbiamo che per ogni formula atomica $p \in \Gamma_0$, $v(p) = 1$, e per ogni formula atomica $q \in \Delta_0$, $v(q) = 0$. Poiché Γ_0 e Δ_0 contengono solo formule atomiche, ne segue che $v(\bigwedge \Gamma_0) = 1$ e $v(\bigvee \Delta_0) = 0$.

Passo induttivo: Assumiamo che per le premesse di una regola nel ramo non chiuso (i.e., sequenti più vicini alla foglia), la tesi induttiva sia vera. Dimostriamo che anche per la conclusione della regola (i.e., il sequente più lontano dalla foglia) è vera. Analizziamo ogni caso:
– (Ax): Non si applica, perché la dimostrazione riguarda i rami aperti, che non terminano con un assioma.

– (Ws):

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

La premessa è $\Gamma \Rightarrow \Delta$. Per ipotesi induttiva, $v(\bigwedge \Gamma) = 1$ e $v(\bigvee \Delta) = 0$. La conclusione è $\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta$. $v(\bigwedge(\alpha, \Gamma)) = \min(v(\alpha), v(\bigwedge \Gamma)) = \min(v(\alpha), 1)$. La refutabilità del

sequente di conclusione richiede $v(\bigwedge(\alpha, \Gamma)) > v(\bigvee \Delta)$, ovvero $\min(v(\alpha), 1) > 0$. Questo è vero solo se $v(\alpha) = 1$. Poiché stiamo costruendo una singola valutazione refutante per l'intero ramo, dobbiamo assumere $v(\alpha) = 1$. Se $v(\alpha) = 0$ per qualche ragione, allora la refutazione non funzionerebbe. Tuttavia, l'esistenza del ramo aperto garantisce l'esistenza di una tale valutazione.

– (Wd):

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha}$$

La premessa è $\Gamma \Rightarrow \Delta$. Per ipotesi induttiva, $v(\bigwedge \Gamma) = 1$ e $v(\bigvee \Delta) = 0$. La conclusione è $\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha$. $v(\bigvee(\Delta, \alpha)) = \max(v(\bigvee \Delta), v(\alpha)) = \max(0, v(\alpha))$. Affinché il sequente sia refutato, dobbiamo avere $v(\bigvee(\Delta, \alpha)) = 0$, il che richiede $v(\alpha) = 0$.

– (Cut): La dimostrazione di completezza senza il taglio è sufficiente grazie al *Teorema di Eliminazione del Taglio*, che garantisce che ogni sequente dimostrabile con il taglio è dimostrabile anche senza. Pertanto, possiamo limitare la nostra analisi ai rami di derivazione senza il taglio.

– ($\neg$s):

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha}{\neg\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Per ipotesi induttiva, la premessa è refutata: $v(\bigwedge \Gamma) = 1$ e $v(\bigvee(\Delta, \alpha)) = \max(v(\bigvee \Delta), v(\alpha)) = 0$. Questo implica $v(\bigvee \Delta) = 0$ e $v(\alpha) = 0$. Per la conclusione, $v(\bigwedge(\neg\alpha, \Gamma)) = \min(v(\neg\alpha), v(\bigwedge \Gamma)) = \min(1 - v(\alpha), 1) = \min(1 - 0, 1) = 1$. Anche $v(\bigvee \Delta) = 0$. Il sequente di conclusione è refutato.

– ($\neg$d):

$$\frac{\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\alpha}$$

Per ipotesi induttiva, la premessa è refutata: $v(\bigwedge(\alpha, \Gamma)) = \min(v(\alpha), v(\bigwedge \Gamma)) = 1$, e $v(\bigvee \Delta) = 0$. Questo implica $v(\alpha) = 1$ e $v(\bigwedge \Gamma) = 1$. Per la conclusione, $v(\bigwedge \Gamma) = 1$ e $v(\bigvee(\Delta, \neg\alpha)) = \max(v(\bigvee \Delta), v(\neg\alpha)) = \max(0, 1 - v(\alpha)) = \max(0, 1 - 1) = 0$. Il sequente di conclusione è refutato.

– ($\wedge$s):

$$\frac{\alpha, \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\alpha \wedge \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Per ipotesi induttiva, $v(\bigwedge(\alpha, \beta, \Gamma)) = \min(v(\alpha), v(\beta), v(\bigwedge \Gamma)) = 1$ e $v(\bigvee \Delta) = 0$. Questo implica $v(\alpha) = 1, v(\beta) = 1, v(\bigwedge \Gamma) = 1$. Per la conclusione, $v(\bigwedge(\alpha \wedge \beta, \Gamma)) = \min(v(\alpha \wedge \beta), v(\bigwedge \Gamma)) = \min(\min(v(\alpha), v(\beta)), 1) = \min(1, 1, 1) = 1$. $v(\bigvee \Delta) = 0$ è preservato. Il sequente è refutato.

– ($\wedge$d):

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \wedge \beta}$$

Un ramo non chiuso significa che almeno una delle premesse non è derivabile. Supponiamo che il nostro ramo passi per la premessa $\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha$. Per ipotesi induttiva, $v(\bigwedge \Gamma) = 1$ e $v(\bigvee(\Delta, \alpha)) = \max(v(\bigvee \Delta), v(\alpha)) = 0$. Questo implica $v(\bigvee \Delta) = 0$ e $v(\alpha) = 0$. Per la conclusione, $v(\bigwedge \Gamma) = 1$. $v(\bigvee(\Delta, \alpha \wedge \beta)) = \max(v(\bigvee \Delta), v(\alpha \wedge \beta)) = \max(0, \min(v(\alpha), v(\beta))) = \max(0, \min(0, v(\beta))) = 0$. Il sequente è refutato.

– ($\vee$s):

$$\frac{\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\alpha \vee \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Poiché un ramo non si chiude, almeno una delle due premesse non è derivabile. Supponiamo che il ramo passi per la premessa $\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta$. Per ipotesi induttiva, $v(\bigwedge(\alpha, \Gamma)) = \min(v(\alpha), v(\bigwedge \Gamma)) = 1$ e $v(\bigvee \Delta) = 0$. Questo implica $v(\alpha) = 1$ e $v(\bigwedge \Gamma) = 1$. Per la conclusione, $v(\bigwedge(\alpha \vee \beta, \Gamma)) = \min(v(\alpha \vee \beta), v(\bigwedge \Gamma)) = \min(\max(v(\alpha), v(\beta)), 1) = \min(\max(1, v(\beta)), 1) = 1$. $v(\bigvee \Delta) = 0$ è preservato. Il sequente è refutato.

– ($\vee$d):

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha, \beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \vee \beta}$$

. Per ipotesi induttiva, $v(\bigwedge \Gamma) = 1$ e $v(\bigvee(\Delta, \alpha, \beta)) = \max(v(\bigvee \Delta), v(\alpha), v(\beta)) = 0$. Questo implica $v(\bigwedge \Gamma) = 1$, $v(\bigvee \Delta) = 0$, $v(\alpha) = 0$ e $v(\beta) = 0$. Per la conclusione, $v(\bigwedge \Gamma) = 1$ e $v(\bigvee(\Delta, \alpha \vee \beta)) = \max(v(\bigvee \Delta), v(\alpha \vee \beta)) = \max(0, \max(v(\alpha), v(\beta))) = \max(0, \max(0, 0)) = 0$. Il sequente è refutato.

– ($\rightarrow$s):

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \quad \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\alpha \rightarrow \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Se un ramo non si chiude, almeno una delle premesse non è derivabile.

- Se è la prima premessa ($\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha$), per ipotesi induttiva $v(\bigwedge \Gamma) = 1$ e $v(\bigvee(\Delta, \alpha)) = \max(v(\bigvee \Delta), v(\alpha)) = 0$. Questo implica $v(\bigvee \Delta) = 0$ e $v(\alpha) = 0$. Per la conclusione, $v(\bigwedge(\alpha \rightarrow \beta, \Gamma)) = \min(v(\alpha \rightarrow \beta), v(\bigwedge \Gamma)) = \min(\max(1 - v(\alpha), v(\beta)), 1) = \min(\max(1 - 0, v(\beta)), 1) = 1$. $v(\bigvee \Delta) = 0$ è preservato.
- Se è la seconda premessa ($\beta, \Gamma \Rightarrow \Delta$), per ipotesi induttiva $v(\bigwedge(\beta, \Gamma)) = \min(v(\beta), v(\bigwedge \Gamma)) = 1$ e $v(\bigvee \Delta) = 0$. Questo implica $v(\beta) = 1$ e $v(\bigwedge \Gamma) = 1$. Per la conclusione, $v(\bigwedge(\alpha \rightarrow \beta, \Gamma)) = \min(\max(1 - v(\alpha), v(\beta)), 1) = \min(\max(1 - v(\alpha), 1), 1) = 1$. $v(\bigvee \Delta) = 0$ è preservato.

In entrambi i casi, la refutabilità si mantiene.

– ($\rightarrow$d):

$$\frac{\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta, \beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \rightarrow \beta}$$

Per ipotesi induttiva, la premessa è refutata: $v(\bigwedge(\alpha, \Gamma)) = \min(v(\alpha), v(\bigwedge \Gamma)) = 1$ e $v(\bigvee(\Delta, \beta)) = \max(v(\bigvee \Delta), v(\beta)) = 0$. Questo implica $v(\alpha) = 1, v(\bigwedge \Gamma) = 1, v(\bigvee \Delta) = 0, v(\beta) = 0$. Per la conclusione, $v(\bigwedge \Gamma) = 1$ e $v(\bigvee(\Delta, \alpha \rightarrow \beta)) = \max(v(\bigvee \Delta), v(\alpha \rightarrow \beta)) = \max(0, \max(1 - v(\alpha), v(\beta))) = \max(0, \max(1 - 1, 0)) = 0$. Il sequente è refutato.
Risalendo l'albero di ricerca con questa valutazione v, arriviamo al sequente iniziale $\Gamma \Rightarrow \Delta$ e concludiamo che $v(\bigwedge \Gamma) = 1$ e $v(\bigvee \Delta) = 0$. Questo significa che il sequente è refutabile, e quindi non valido. Questo completa la dimostrazione per contronominale.

□

Nel contesto del calcolo dei sequenti, l'equivalenza stabilita dai teoremi di correttezza e completezza afferma quindi che un sequente è dimostrabile sintatticamente se e solo se è semanticamente valido. Questo risultato funge da collegamento cruciale tra la teoria della dimostrazione (che studia i sistemi formali di prova) e la teoria dei modelli (che si occupa del significato e della verità delle formule in strutture matematiche). Non si tratta, come già sappiamo, di un teorema esclusivo della teoria della dimostrazione, bensì di un pilastro della logica matematica nel suo complesso.

3.4 Calcolo dei sequenti per la logica proposizionale intuizionistica

Nella sezione introduttiva a questo capitolo abbiamo presentato gli aspetti storici ed epistemologici che hanno motivato il programma di Hilbert e la successiva nascita del calcolo dei sequenti. Accanto agli elementi già menzionati, è importante approfondire le idee di una scuola fondazionale che hanno contraddistinto e contraddistinguono il dibattito sui fondamenti della matematica: l'*intuizionismo*. L'intuizionismo, rappresentato da Brouwer e dai suoi allievi come Heyting e Weyl, è la scuola di pensiero che più di ogni altra si è opposta al formalismo di Hilbert, stimolando un accesissimo dibattito. In particolare, Brouwer e Weyl svilupparono proposte radicali in risposta alla svolta non costruttiva e infinitaria che la matematica classica aveva preso dalla fine dell'Ottocento. In *Das Kontinuum* (1918), Weyl criticò la teoria degli insiemi e l'analisi classica definendola "una casa costruita sulla sabbia" e propose un rimedio all'incertezza che, a suo avviso, affliggeva gran parte della matematica. Nella prima parte del libro, Weyl avanzò una serie di critiche all'analisi e alla teoria degli insiemi contemporanee, oltre che ad alcune delle ricostruzioni accettate della matematica classica, come la teoria degli insiemi di Zermelo e la teoria dei tipi di Russell. Nella parte positiva, sviluppò il proprio continuo aritmetico, un sistema numerico in cui ampie

porzioni di analisi potevano essere svolte. Questa posizione fondazionale è chiamata *predicatività*.

Nel 1921, appena tre anni dopo la pubblicazione di *Das Kontinuum*, Weyl scoprì la nuova proposta intuizionistica sostenuta da Brouwer. Questa fu la proposta più radicale nel dibattito sui fondamenti della matematica. Era radicale in quanto spingeva all'abbandono del principio logico del terzo escluso per le totalità infinite e della matematica non costruttiva e, di conseguenza, della maggior parte della matematica infinitaria. I costi da pagare erano alti, dato che la ricostruzione intuizionistica della matematica doveva sacrificare gran parte della matematica classica. Tuttavia, ciò non dissuase Weyl, che parlò di Brouwer come "*die Revolution*". Weyl si unì alla critica di Brouwer e abbandonò la sua precedente posizione "predicativista", principalmente per motivi epistemologici.

Brouwer ha occupato un posto importante nella matematica del suo tempo, soprattutto in topologia, per il teorema del punto fisso. Ha conseguito il dottorato nel 1907 sotto la supervisione di Diederik Johannes Korteweg (1848-1941) e nel 1908 ha pubblicato due articoli: il primo dedicato alle cardinalità infinite e al continuo, mentre il secondo, molto più importante per i nostri scopi, intitolato "*L'inaffidabilità dei principi logici*".

In questo articolo, Brouwer difende l'idea che il principio del terzo escluso non possa essere esteso agli insiemi infiniti: per affermare $\varphi \vee \neg\varphi$, infatti, è necessaria una costruzione che esegua il compito descritto da φ o una costruzione che blocchi ogni processo di esecuzione di tale compito. Brouwer distingue quindi tra *verità dimostrabili* e *non-contraddizioni dimostrabili*. La semplice non contraddittorietà di una teoria o di un'asserzione non ha, a suo parere, un significato matematico. La negazione $\neg\varphi$ nella logica intuizionistica deve essere intesa come "è dimostrabile che φ è impossibile", ovvero "è dimostrabile che φ è assurdo". Sulla base di queste premesse, il principio del terzo escluso non è giudicato falso *in sé* – nel senso che $\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$ è vero –, ma è considerato valido solo in *domini finiti*. Il vero problema per Brouwer è il passaggio automatico dalla non contraddittorietà all'esistenza. Pertanto, la legge della doppia negazione ($\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$) viene rifiutata, in quanto intuizionisticamente equivalente al principio del terzo escluso. E questo è il motivo per cui Brouwer sosteneva che Hilbert continuasse ad assumere il principio della risolubilità di tutti i problemi, perché lo identificava con il *tertium non datur*. Secondo Brouwer, questo principio è falso, sebbene non sia contraddittorio.

La logica intuizionistica era in passato motivata da forti ragioni filosofiche. Oggi, le ragioni per utilizzare il ragionamento intuizionistico o costruttivistico possono essere del tutto neutrali da un punto di vista filosofico. Nel calcolo originale di Gentzen (1934-35), le regole strutturali erano inizialmente assunte e solo in seguito veniva dimostrato come eliminare le applicazioni della regola di taglio. Un calcolo per la logica intuizionistica privo di regole strutturali fu sviluppato per la prima volta da Stephen Kleene (1909-1994) nel 1952.

In generale, il calcolo dei sequenti intuizionistico LJ si ottiene imponendo al calcolo LK *la restrizione che il conseguente di ogni sequente sia costituito da al massimo una singola formula*: "la differenza è caratterizzata dalla restrizione sul conseguente" (Gentzen 1934-35, p. 80, *traduzione nostra*). Ovviamente, questa restrizione deve essere accompagnata da una adeguata riformulazione delle regole che prevedono conseguenti complessi. Le regole del calcolo LJ per la logica proposizionale intuizionistica sono le seguenti

Assiomi

$$\alpha \Rightarrow \alpha \text{ (Ax)}$$

Regole Strutturali

Indebolimento sinistra e destra

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \text{Ws} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow \alpha}\ \text{Wd}$$

Taglio

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \mu \quad \mu, \Theta \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Theta \Rightarrow \Sigma}\ \text{Cut}$$

Regole operazionali

$\neg$ *sinistra e destra*

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \alpha}{\neg\alpha, \Gamma \Rightarrow}\ \neg\text{s} \qquad \frac{\alpha, \Gamma \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow \neg\alpha}\ \neg\text{d}$$

$\wedge$ *sinistra e destra*

$$\frac{\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\alpha \wedge \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \wedge\text{s1} \qquad \frac{\beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\alpha \wedge \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \wedge\text{s2} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \alpha \quad \Gamma \Rightarrow \beta}{\Gamma \Rightarrow \alpha \wedge \beta}\ \wedge\text{d}$$

$\vee$ *sinistra e destra*

$$\frac{\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\alpha \vee \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \vee\text{s} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \alpha}{\Gamma \Rightarrow \alpha \vee \beta}\ \vee\text{d1} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \beta}{\Gamma \Rightarrow \alpha \vee \beta}\ \vee\text{d2}$$

$\rightarrow$ *sinistra e destra*

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \alpha \quad \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\alpha \rightarrow \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \rightarrow\text{s} \qquad \frac{\alpha, \Gamma \Rightarrow \beta}{\Gamma \Rightarrow \alpha \rightarrow \beta}\ \rightarrow\text{d}$$

Naturalmente, il calcolo intuizionistico LJ pone delle precise restrizioni riguardo al modo in cui possono essere condotte le prove e, di conseguenza, all'eventuale accettazione di principi logici. Su tutti, come abbiamo spiegato, viene meno il principio del terzo escluso; mentre la legge della doppia negazione diventa $\alpha \Rightarrow \neg\neg\alpha$.

Esempio 3.9. [*Legge della doppia negazione intuizionistica*]

Dimostrazione.

$$\alpha \Rightarrow \neg\neg\alpha$$

$$\dfrac{\dfrac{\alpha \Rightarrow \alpha \quad (\mathrm{Ax})}{\alpha, \neg\alpha \Rightarrow}\,\neg\mathrm{s}}{\alpha \Rightarrow \neg\neg\alpha}\,\neg\mathrm{d}$$

□

Consideriamo alcune derivazioni valide in LJ.

Esempio 3.10. [*Legge dello pseudo Scoto LPS (ex contradictione sequitur quodlibet)*]

Dimostrazione.

$$\alpha, \neg\alpha \Rightarrow \beta$$

Prova in LK

$$\dfrac{\alpha \Rightarrow \alpha, \beta \quad (\mathrm{Ax})^{\mathrm{Wd}}}{\alpha, \neg\alpha \Rightarrow \beta}\,\neg\mathrm{s}$$

Prova in LJ

$$\dfrac{\dfrac{\alpha \Rightarrow \alpha \quad (\mathrm{Ax})}{\alpha, \neg\alpha \Rightarrow}\,\neg\mathrm{s}}{\alpha, \neg\alpha \Rightarrow \beta}\,\mathrm{Wd}$$

□

Esempio 3.11. [$\Rightarrow (\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha$]

Dimostrazione.

$$\Rightarrow (\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha$$

$$\dfrac{\dfrac{\alpha \Rightarrow \alpha \quad (\mathrm{Ax})}{\alpha \wedge \beta \Rightarrow \alpha}\,\wedge\mathrm{s1}}{\Rightarrow (\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha}\,\rightarrow\mathrm{d}$$

Esempio 3.12. [*Legge di De Morgan intuizionistica*]

Dimostrazione.

$$\neg\alpha \wedge \neg\beta \Rightarrow \neg(\alpha \vee \beta)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \Rightarrow \alpha \quad (\mathrm{Ax})}{\neg\alpha, \alpha \Rightarrow}\,\neg\mathrm{s} \qquad \dfrac{\beta \Rightarrow \beta \quad (\mathrm{Ax})}{\neg\beta, \beta \Rightarrow}\,\neg\mathrm{s}}{\neg\alpha, \neg\beta, \alpha \vee \beta \Rightarrow}\,\vee\mathrm{s}}{\neg\alpha \wedge \neg\beta, \alpha \vee \beta \Rightarrow}\,\wedge\mathrm{s}}{\neg\alpha \wedge \neg\beta \Rightarrow \neg(\alpha \vee \beta)}\,\neg\mathrm{d}$$

□

3.5 L'analiticità delle dimostrazioni

La distinzione tra *analitico* e *sintetico* ha animato a lungo il dibattito filosofico, coinvolgendo pensatori da Aristotele a Kant, da Leibniz a Willard Van Orman Quine (1908-2000). In questa sezione, indagheremo questi due concetti non secondo la loro tradizionale accezione filosofica, ma in riferimento a due distinti metodi di prova. Storicamente, si possono distinguere un metodo di prova analitico e uno sintetico in diverse maniere. In geometria, ad esempio, una dimostrazione è considerata analitica se non introduce nuove costruzioni (come nuove linee, cerchi o punti), mentre è definita sintetica quando tali costruzioni sono necessarie. Il metodo sintetico può essere associato al processo deduttivo: si parte da assiomi noti per giungere a un teorema. Al contrario, in una prova analitica, il punto di partenza è il teorema stesso che si intende dimostrare, risalendo poi verso gli assiomi.

Per definire la dicotomia in un senso logicamente più preciso, la distinzione si articola come segue. Nella concezione sintetica, le dimostrazioni sono caratterizzate dalla loro *concisione*. Nella concezione analitica, invece, l'attenzione si sposta sulla progressiva *riduzione della complessità concettuale*: le dimostrazioni analitiche procedono sistematicamente da idee complesse a idee più semplici. Pertanto, se le prove sintetiche offrono il vantaggio di essere più brevi, quelle analitiche si distinguono per essere *self-contained*, in quanto ogni elemento che occorre nella prova è già implicito nella conclusione.

La preferenza per il metodo analitico vanta una storia lunga e illustre. Già Aristotele e Platone, così come il pitagoreo Ippocrate (460-367 a.C) e il matematico Pappo (290-350 a.C.), non nascondevano la loro predilezione per questo tipo di dimostrazioni. In particolare, Aristotele, negli *Analitici Posteriori*, richiedeva ai matematici di rispettare un rigoroso requisito metodologico, che è parte integrante del suo approccio all'analisi scientifica e matematica, e che consisteva nella cosiddetta "*purezza dei metodi*". Lo Stagirita sosteneva che i matematici non dovrebbero usare nelle loro dimostrazioni concetti appartenenti a un dominio teorico diverso da quello impiegato inizialmente. In questo senso, la "purezza" non è solo una scelta stilistica, ma una condizione fondamentale per la validità e la correttezza delle dimostrazioni:

> Non si può dimostrare nulla passando da un genere all'altro, ad esempio qualcosa di geometrico con l'aritmetica [...]. Le dimostrazioni aritmetiche contengono sempre il genere di cui si occupano le dimostrazioni, e così fanno tutte le altre dimostrazioni. Perciò il genere deve essere lo stesso, sia in senso assoluto sia in qualche aspetto, affinché una dimostrazione possa passare. (*Analitici Secondi (Organon)*, Libro I, Capitolo 7, 75a38–75b15)

In epoca moderna, figure come Cartesio, Antione Arnauld (1612-1694) e Blaise Pascal (1623-1662) possono essere annoverate tra i sostenitori delle prove analitiche, mentre, alla fine dell'Ottocento, il grande studioso Bernhard Bolzano (1781-1848) inserì tra i

primi requisiti delle sue prove (eziologiche) la clausola dell'analiticità. Un'importanza estrema alle prove analitiche viene accordata dallo stesso Gentzen, che nel seguente celebre passaggio sostiene:

> Forse possiamo esprimere le proprietà essenziali di tale forma normale dicendo: non è ridondante. Nessun concetto entra nella prova se non quelli contenuti nel suo risultato finale e il loro uso è perciò fondamentale per stabilire tale conclusione. (Gentzen 1969, p. 91, *traduzione nostra*)

L'importanza e l'interesse delle prove analitiche non sono testimoniati unicamente da questa lunga lista di illustri pensatori, ma possono essere facilmente apprezzati riflettendo sulle stesse parole di Gentzen. Nelle dimostrazioni analitiche, in senso logico, tutti i concetti utilizzati nella prova sono contenuti nella conclusione; questa caratteristica ci assicura che la dimostrazione è in qualche modo essenziale, poiché nulla viene introdotto se non è strettamente necessario a derivare il risultato finale.

Per analizzare meglio le prove analitiche nel calcolo dei sequenti, introduciamo una proprietà ormai ben nota: la proprietà della sottoformula. Un calcolo si dice soddisfare questa proprietà se e solo se ogni teorema in esso dimostrabile possiede una derivazione tale che ogni formula che vi occorre è una sottoformula della formula che compare nella conclusione. Una breve riflessione è sufficiente per rendersi conto che la proprietà della sottoformula non è altro che il corrispettivo formale dell'idea di prova analitica di cui abbiamo parlato finora. In altre parole, ogni prova analitica (in senso logico) rispetta la proprietà della sottoformula, e ogni prova che rispetta tale proprietà deve essere considerata analitica.

Consideriamo ora il calcolo dei sequenti e ripensiamo alle sue regole logiche e strutturali (ad eccezione della regola del taglio). È facile osservare che ciascuna di queste regole rispetta la proprietà della sottoformula: in ciascuna di esse, ogni formula che compare nelle premesse è una sottoformula di una delle formule che compare nella conclusione. Se, dunque, costruiamo una derivazione utilizzando solo queste regole, possiamo essere certi che tale derivazione può e deve essere considerata una prova analitica, ossia una prova composta esclusivamente da elementi che sono già parte della sua conclusione.

Come abbiamo già accennato, a questa elegante armonia sfugge un'unica regola: quella del taglio. In tale regola, se analizzata dal basso verso l'alto, introduciamo infatti una nuova formula che potrebbe non essere una sottoformula di nessuna delle formule che compongono la conclusione. La regola del taglio, se usata in una derivazione, porta quindi direttamente alla violazione del requisito di analiticità. Per questa ragione, essa merita un'analisi più approfondita. Da un lato, la regola del taglio rappresenta l'equivalente formale di un'operazione comune nelle dimostrazioni: l'uso di risultati già stabiliti per accorciare il processo. Quando, nel mezzo di un ragionamento, ci accorgiamo che possiamo sfruttare un'informazione (tipicamente un lemma) già dimostrata, è naturale e vantaggioso farlo. La regola del taglio cattura precisamen-

te questo tipo di inferenza, rendendola una regola naturale e di grande importanza soprattutto nel ragionamento matematico.

D'altro canto, essa incarna l'elemento sintetico del ragionamento. Abbreviando una prova con l'introduzione di elementi che non compaiono necessariamente nel risultato finale, ci allontaniamo da una procedura puramente analitica. Sono proprio questi due aspetti, apparentemente in contrasto ma coesistenti, che spiegano perché Gentzen, pur includendola tra le regole strutturali dei suoi calcoli dei sequenti, sentì la necessità di dimostrarne l'eliminabilità. Il risultato più celebre di Gentzen nell'ambito dei calcoli dei sequenti è l'*Hauptsatz*, o *teorema di eliminazione del taglio*[9]. Questo teorema dimostra che la regola del taglio è in un certo senso ridondante, ovvero che qualsiasi derivazione che la contenga può essere trasformata in una in cui essa è completamente assente. Gentzen, con l'eliminazionedella regola del taglio, mostra dunque che ogni prova sintetica formulabile nel suo calcolo può essere convertita in una prova analitica.

Il teorema di eliminazione del taglio è lungo e complesso da dimostrare, ma il suo valore va oltre l'aspetto tecnico. A livello tecnico, offre molteplici vantaggi: in un calcolo che gode della proprietà della sottoformula, è molto più semplice dimostrare teoremi come quello di *decidibilità* o il *teorema d'interpolazione*. Inoltre, l'ottenimento della proprietà della sottoformula permise a Gentzen di provare la consistenza dell'aritmetica, superando i teoremi limitativi di Gödel. Per quanto riguarda il suo significato concettuale, l'importanza del teorema non si limita alla centralità delle prove analitiche, ma tocca anche altri aspetti di filosofia e fondamenti della matematica esplorati da numerosi studiosi negli ultimi ottant'anni. Senza entrare nei particolari tecnici (che in questa sede ci sono preclusi), ci preme semplicemente riportare un importante teorema che segue dall'estensione del teorema di consistenza di LK e LJ.

Teorema 3.4. Ogni teoria per la quale vale il teorema di eliminazione del taglio è consistente.

Posta la consistenza di LK e LJ (ovvero l'impossibilità di derivare una qualsiasi contraddizione: $\nvdash_{\mathrm{LK}} \perp$ e $\nvdash_{\mathrm{LJ}} \perp$), ne consegue che una teoria T – definita come un insieme di assiomi A più un calcolo (dei sequenti) C, $\langle \mathrm{A}, \mathrm{C} \rangle$ – per la quale vale il teorema di elminazione del taglio è consistente. Questo sinigica che non è possibile derivare dagli insiemi degli assiomi $\mathrm{A}(T)$ la sequenza $\mathrm{A}(T) \vdash \perp$. Gentzen nei suoi risultati sui fondamenti della matematica sfrutta il concetto di teoria intesa come un calcolo allargato a un insieme di regole che corrisponde all'insieme degli assiomi. In questo modo, "il sistema dell'aritmetica di Peano si ottiene aggiungendo nuovi sequenti iniziatli (oltre agli assiomi) come $\vdash x + 0 = 0$ oppure vere e proprie regole" (Galvan 2015, p. 98).

Riportiamo, in conclusione, una specifica osservazione di Galvan sul profondo significato logico dei risultati di Gentzen:

> Ebbene il risultato di Gentzen non va certamente nella direzione di confermare

[9] Sull'*Hauptsatz* di Gentzen si veda in particolare (Galvan 2015).

il fenomeno di incompletezza semantica cui sono approdati Gödel e Tarski. La distinzione tra il piano della verità e quello della dimostrabilità per Gentzen non ha senso, essendo profondamente radicato il suo metodo in una visione costruttivistica dell'argomentazione logica e matematica. Tuttavia la struttura gerarchica delle teorie e l'emergenza delle teorie sovraordinate rispetto a quelle sottoordinate è una conseguenza immediata anche del risultato di Gentzen. Come sopra si è detto, la maggior forza della sovrateoria corrisponde al limite più alto dell'induzione transfinita a cui si deve ricorrere per garantirne la consistenza. E dal momento che tale limite si accompagna ad un più alto grado di astrattezza e che a questa corrisponde un pari livello di astrattezza intuitiva, anche la *Beweistheorie* di Gentzen ha un esito non finitario. Di nuovo, non un esito infinitario, nel senso di un approdo ontologico a una realtà di oggetti astratti indipendenti dalle nostre abilità costruttive, ma un esito infinitario nel senso della costruzione di oggetti via via più astratti. (*ivi*, p. 100)

ESERCIZI CAP. 3.

Esercizio 3.1. Deriva in LK, utilizzando il calcolo dei sequenti, le seguenti formule.

1. $\Rightarrow \neg(p \wedge \neg p)$ (non contraddizione)
2. $\Rightarrow p \vee \neg p$ (terzo escluso)
3. $\Rightarrow p \to \neg\neg p$ (doppia negazione: solo un verso)
4. $\Rightarrow \neg p \to (p \to q)$ (ex falso quodlibet)
5. $\Rightarrow p \to p$ (identità)
6. $\Rightarrow p \to (q \to p)$ (aggiunta)
7. $\Rightarrow (p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$ (transitività)
8. $\Rightarrow (p \to (p \to q)) \to (p \to q)$ (contrazione)
9. $\Rightarrow (p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$ (scambio)
10. $\Rightarrow ((p \to q) \to p) \to p$ (legge di Peirce)
11. $\Rightarrow p \wedge q \to p$ (minorante)
12. $\Rightarrow p \wedge q \to q$ (minorante)
13. $\Rightarrow p \to p \vee q$ (maggiorante)
14. $\Rightarrow q \to p \vee q$ (maggiorante)
15. $\Rightarrow p \vee p \to p$ (idempotenza: solo un verso)

Esercizio 3.2. ♠ Deriva in LK, utilizzando il calcolo dei sequenti, le seguenti formule.

1. $\Rightarrow (p \wedge (p \to q)) \to q$ (modus ponens: forma implicativa)
2. $\Rightarrow (\neg q \wedge (p \to q)) \to \neg p$ (modus tollens: forma implicativa)
3. $\Rightarrow (p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$ (contrapposizione)
4. $\Rightarrow ((p \to q) \wedge (p \to r)) \to (p \to q \wedge r)$ (massimo minorante: implicativo)
5. $\Rightarrow p \wedge p \to p$ (idempotenza: solo un verso)
6. $\Rightarrow (p \wedge q) \to (q \wedge p)$ (commutatività: solo un verso)
7. $\Rightarrow ((p \to r) \wedge (q \to r)) \to (p \vee q \to r)$ (minimo maggiorante: implicativo)
8. $\Rightarrow (p \vee q) \to (q \vee p)$ (commutatività: solo un verso)
9. $\Rightarrow p \wedge (q \vee r) \to (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (distributività)
10. $\Rightarrow \neg(p \wedge q) \to (\neg p \vee \neg q)$ (legge di De Morgan: solo un verso)
11. $\Rightarrow p \wedge q \to \neg(p \to \neg q)$ (congiunzione in termini di implicazione: solo un verso)
12. $\Rightarrow p \vee (q \wedge r) \to (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (distributività)
13. $\Rightarrow \neg(p \vee q) \to (\neg p \wedge \neg q)$ (legge di De Morgan: solo un verso)
14. $\Rightarrow (p \vee q) \to (\neg p \to q)$ (disgiunzione in termini di implicazione: solo un verso)
15. $\Rightarrow (p \to q) \to \neg(p \wedge \neg q)$ (legge di Crisippo: solo un verso)

4

Logica del primo ordine

Il CAP. 4 amplia e sviluppa il lavoro svolto nei capitoli precedenti estendendolo alla logica dei predicati. Dopo aver introdotto il linguaggio predicativo, definiamo rigorosamente il concetto di *modello*. Successivamente, estendiamo il metodo dei tableaux analitici e del calcolo dei sequenti alla logica dei predicati. Il volume si conclude con una variante del metodo dei tableaux detta *tableaux analitici a blocchi* (nella notazione a sequenti), e dimostriamo come tradurre questa variante nel calcolo dei sequenti.

4.1 Il linguaggio della logica del primo ordine

La logica del prim'ordine, detta anche logica predicativa (o dei predicati), disponendo di un linguaggio più ricco rispetto alla logica proposizionale, è in grado di formalizzare gli enunciati in modo più profondo e articolato. Metaforicamente, la logica del prim'ordine può essere intesa come un potente microscopio capace di scomporre quelle unità sintattiche che, nel linguaggio proposizionale, risultano atomiche nelle loro componenti più elementari.

L'evoluzione storica della logica del prim'ordine è estremamente complessa da tracciare. Elementi di teoria della quantificazione si possono già rintracciare nei lavori di Boole (1847), De Morgan (1864) e, con maggiore compiutezza, in *On the Algebra of Logic* di Charles Sanders Peirce (1839-1914) del 1885. Pierce adottò per la prima volta un simbolo specifico per il quantificatore universale Π e Σ per il quantificatore esistenziale. L'ispirazione ai simboli, comunemente usati per rappresentare la sommatoria Σ e la produttoria Π di un insieme di valori, non era affatto casuale. Infatti, riprendendo la notazione booleana, Pierce intendeva gli enunciati quantificati universalmente ed esistenzialmente come congiunzioni e disgiunzioni infinite di enunciati atomici, rispettivamente. Il passo decisivo nella storia della logica predicativa è rappresentato dai lavori di Frege (1879, 1892). La logica di Frege, tuttavia, era uno strumento di natura strettamente fondazionale, concepito per indagare i fondamenti dell'analisi reale. Inoltre, nei suoi lavori Frege non distingueva tra logica proposizionale e del prim'ordine (e di ordine superiore).

Negli anni successivi Russell contribuì, con la sua *teoria dei tipi*, a migliorare il lavoro di Frege. Egli integrò alla notazione di Peano, che già conteneva il simbolo $\exists$, un nuovo simbolo per il quantificatore universale (x). Pur essendo importanti, i lavori di Russell (e Whitehead) non portarono a un chiarimento decisivo. Al contrario, le ricerche di Hilbert e Bernays posero le basi per la logica nella sua forma attuale. Hilbert nelle sue celebri lezioni invernali del 1917/1918, e Bernays nella sua dissertazione di abilitazione, definirono chiaramente: *i*) il linguaggio della logica proposizionale e predicativa; *ii*) la distinzione tra logica del prim'ordine e logica di ordine superiore; e *iii*) l'avvio dell'indagine metateorica sulla logica.

La completezza della logica dei predicati fu definitivamente dimostrata da Gödel nella sua tesi di dottorato del 1929 e, successivamente, in un articolo del 1930, rispetto alla semantica che oggi chiamiamo tarskiana.

La logica del prim'ordine permette di parlare di un determinato dominio in modo più dettagliato rispetto alla logica proposizionale, nominando direttamente un individuo specifico e definendo proprietà e relazioni tra di essi.

Consideriamo, ad esempio, l'enunciato "Il numero 3 è dispari". La sua formalizzazione nel linguaggio proposizionale sarà semplicemente φ, ovvero un enunciato atomico. Nel linguaggio al prim'ordine, invece, l'enunciato può essere formalizzato come $D(3)$, dato che questo linguaggio permette di parlare delle proprietà degli individui. In questo caso, D è il simbolo per il predicato "essere dispari" e "3" è la costante individuale che denota il numero 3. L'analisi linguistica della logica predicativa è in grado di scendere al di sotto del livello puramente proposizionale, sviluppando, a partire dai lavori di Frege, alcune importanti caratteristiche

1. l'eliminazione della copula e della distinzione, tipica nell'analisi grammaticale, tra predicato nominale e verbale;
2. la divisione delle proposizioni assertive in due parti: una semanticamente completa e l'altra semanticamente incompleta;
3. la possibilità, da parte della nozione di predicato, di essere nome non solo di proprietà ma anche di relazioni.

Analizziamo meglio i tre punti della teoria freghiana della predicazione, partendo dal punto 2. Consideriamo le seguenti proposizioni

a) "Aristotele è un logico"

b) "Aristotele pensa"

c) "Aristotele legge un libro"

Focalizziamoci sulle prime due proposizioni. La parte semanticamente completa è il nome "Aristotele", che designa un individuo, "vale a dire qualcosa che è determinato

in se stesso e che non ha la funzione d'essere determinazione d'altro e perciò stesso è completo" (Galvan 2012, p. 31). Le parti incomplete sono i predicati "è un logico" e "pensa", rispettivamente. I predicati sono la parte incompleta poiché la loro funzione non è quella di designare un individuo ma di *caratterizzarlo*:

> In termini freghiani, si può anche dire che, mentre la caratteristica essenziale di un soggetto è quella di denotare un individuo, la caratteristica essenziale di un predicato è quella di essere detto di un individuo. (*ibidem*)

Il punto $1.$ segue dal fatto che la copula non è una parte della proposizione, ma solo la relazione d'appartenenza tra la parte semanticamente completa e quella incompleta. Per questo motivo, viene legittimamente tralasciata da Frege. Indicando con L la proprietà di essere un logico e con a l'individuo Aristotele, la proposizione *a*) diventerà $L(a)$.

Per quanto riguarda, invece, l'eliminazione della distinzione tra predicato nominale e verbale, la motivazione sta nel fatto che il soggetto logico è *univocamente* inteso: non è possibile interpretare il soggetto a volte come soggetto di attribuzione e altre come soggetto dell'azione. Essendo il soggetto sempre e solo un nome di un individuo, il predicato verbale è trattato allo steso modo del predicato nominale. La proposizione *b*) è letta come "Aristotele è pensante", dove "è pensante" svolge il ruolo di predicato nominale. Indicando con P la proprietà che "Aristotele è pensante", la proposizione *b*) verrà tradotta come $P(a)$.

Infine, il punto $3.$ specifica la novità nella nozione di predicato:

> [...] la possibilità di essere nome non solo di proprietà ma anche di *relazioni* e la conseguente capacità di esprimere il contenuto dei *complementi*, in modo tale da consentire la riduzione della tripla tradizionale soggetto/predicato/complementi alla coppia moderna soggetto/predicato. (*ivi*, p. 32)

In questo modo, ponendo l per "il libro" e L per la relazione "essere lettore di" la proposizione *c*) è traducibile con $L(a, l)$.

Le potenzialità della logica del prim'ordine non si limitano a un'analisi più articolata degli enunciati, ma offrono anche la possibilità di quantificare su di essi. Consideriamo le seguenti proposizioni

d) "Qualcuno è un matematico"

e) "Tutti sono matematici"

Per tradurre queste frasi occorre introdurre il concetto di *operatore logico di quantificazione* (o quantificatore), già utilizzato a partire dal CAP. 1. La proposizione *d*) può essere trasformata in "Esiste almeno una x tale che x è un matematico". Indicando la

sottoespressione "x è un matematico" con $M(x)$, otteniamo un'espressione che prende il nome di *forma proposizionale*. Questa è un'espressione che ha la *struttura* di una proposizione ma che non può essere ancora considerata né vera né falsa, a causa della presenza di variabili. Solo dopo aver sostituito la variabile x con un individuo, la proposizione è suscettibile di essere vera o falsa. Sostituendo "esiste almeno" con il quantificatore esistenziale $\exists$ avremo

$$\exists x M(x)$$

In modo analogo, la proposizione *e*) può essere trasformata in "Per ogni x, x è un matematico", e utilizzando il quantificatore universale $\forall$ avremo

$$\forall x M(x)$$

Mostriamo ora alcuni esempi di formalizzazione delle proposizioni usando il linguaggio della logica del prim'ordine.

Esempio 4.1. [Formalizzazione proposizioni]

- "Qualcuno ha salutato Socrate" $\equiv \exists x S(x, s)$;
- "Socrate ha salutato qualcuno" $\equiv \exists x S(s, x)$;
- "Qualcuno ha salutato qualcuno" $\equiv \exists x \exists y S(x, y)$;
- "Tutti sono figli di Adamo" $\equiv \forall x F(x, a)$;
- "Qualcuno saluta tutti" $\equiv \exists x \forall y S(x, y)$;
- "Tutti salutano qualcuno" $\equiv \forall x \exists y S(x, y)$;
- "Tutti gli uomini salutano" $\equiv \forall x(U(x) \to S(x))$;
- "Qualche uomo saluta" $\equiv \exists x(U(x) \wedge S(x))$;
- "Tutti gli uomini non salutano" $\equiv \forall x(U(x) \to \neg S(x))$;
- "Nessun uomo non saluta" $\equiv \neg \exists x(U(x) \wedge \neg S(x))$;
- "Non tutti gli uomini non salutano" $\equiv \neg \forall x(U(x) \to \neg S(x))$;
- "Cartesio scrive un libro" $\equiv \exists x(L(x) \wedge S(c, x))$;
- "Qualcuno scrive un libro" $\equiv \exists x \exists y(L(y) \wedge S(x, y))$
- "Qualche uomo scrive un libro" $\equiv \exists x \exists y(U(x) \wedge L(y) \wedge S(x, y))$;
- "Tutti scrivono un libro" $\equiv \forall x \exists y(L(y) \wedge S(x, y))$;
- "Qualcuno scrive tutti i libri" $\equiv \exists x \forall y(L(y) \to S(x, y))$;
- "Qualche uomo scrive tutti i libri" $\equiv \exists x(U(x) \wedge \forall y(L(y) \to S(x, y)))$;
- "Tutti gli uomini scrivono tutti i libri" $\equiv \forall x(U(x) \wedge \forall y(L(y) \to S(x, y)))$[1];
- "Tutti i numeri hanno un successore" $\equiv \forall x(N(x) \to \exists y(N(y) \wedge S(y, x)))$;
- "Tutti i numeri pari maggiore di 2 possono essere scritti come somma di due numeri primi"[2] $\equiv \forall x((N(x) \wedge P_1(x) \wedge > (x, 2)) \to \exists y \exists z(P_2(y) \wedge P_2(z) \wedge x = y + z))$.

[1] Oppure: $\forall x \forall y(U(x) \wedge L(y) \to S(x, y))$.

[2] Questa è la *congettura di Goldbach*, uno dei problemi irrisolti della teoria dei numeri. A tutt'oggi non è stata né dimostrata né confutata.

La moderna logica simbolica dei predicati ha quindi il merito di superare i due limiti della sillogistica aristotelica[3]: *i*) l'essere un linguaggio per soli *predicati monadici* (proprietà), in cui non sono presenti segni per le relazioni; e *ii*) l'impossibilità di un uso *iterato* dei quantificatori.

4.2 Sintassi della logica del primo ordine

Iniziamo presentando la definizione del linguaggio della logica del prim'ordine.

Definizione 4.1. [$\mathcal{L}_1$]

$$\mathcal{L}_1 = (A(\mathcal{L}_1), R(\mathcal{L}_1))$$

in cui

- $A(\mathcal{L}_1)$ è l'alfabeto del linguaggio;
- $R(\mathcal{L}_1)$ sono le regole di costruzione dei segni complessi.

Definizione 4.2. [$A(\mathcal{L}_1)$] L'alfabeto $A(\mathcal{L}_1)$ contiene

- un insieme numerabile di variabili individuali: $Var_1 = \{x_1, \ldots, x_n\}$;
- un insieme numerabile di costanti individuali: $Cost = \{a_1, \ldots, a_n\}$;
- un insieme numerabile di costanti predicative: $Pre = \{P_1^1, \ldots, P_i^n\}$;
- un insieme numerabile di lettere funzionali: $Fun = \{f_1^1, \ldots, f_i^n\}$;
- un insieme di simboli per operatori logici: $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$;
- un insieme di simboli per quantificatori $\{\forall, \exists\}$;
- un insieme di simboli ausiliari: $\{(,)\}$.

Le costanti individuali sono nomi propri per gli individui che identificano univocamente un oggetto e si dicono anche *soggetti*[4]. Le variabili individuali sono, invece, variabili per individui che permettono di esprimere la generalità. Le costanti predicative (o attributive) rappresentano predicati monadici (proprietà o attributi) e non monadici (relazioni): l'apice indica il numero dei loro argomenti, mentre il pedice serve per distinguerle l'una dall'altra. Le lettere funzionali rappresentano particolari tipi di funzioni dette *funtori*: applicate a degli oggetti, producono altri oggetti come valore. Ad esempio, il funtore "la capitale di" applicato all'oggetto "Inghilterra" dà come risultato "Londra". Anche le lettere funzionali, come quelle predicative, sono caratterizzate da un numero di argomenti e da un indice che le distingue. L'insieme

[3] Per una ricostruzione della presenza di Aristotele nel pensiero contemporaneo si veda (Berti 1992); mentre per uno studio più esteso sulla *dottrina della sostanza* nella filosofia contemporanea si veda (d'Atri 2016).

[4] Formalmente, l'insieme delle costanti individuali è superfluo, poiché il loro ruolo sintattico e semantico può essere ricoperto dalle variabili. Ciononostante, per ragioni intuitive, le costanti sono mantenute all'interno del vocabolario di $\mathcal{L}_1$.

dei quantificatori è stato precedentemente descritto, mentre i simboli per gli operatori logici e quelli ausiliari sono gli stessi del vocabolario della logica proposizionale.

Definizione 4.3. [Termini di $A(\mathcal{L}_1)$] L'insieme dei *termini* $Ter = \{t_1, \ldots, t_n\}$ di $\mathcal{L}_1$ è il più piccolo insieme che soddisfa le seguenti condizioni:

- le variabili e le costanti individuali sono termini;
- se f_i^n è una lettera funzionale e $t_1, \ldots, t_n$ sono termini, allora $f_i^n(t_1, \ldots, t_n) \in Ter$.

Definizione 4.4. [*Formula atomica in* $\mathcal{L}_1$] Se $P_i^n \in Pre$ e $t_1, \ldots, t_n \in Term$, allora $P_i^n(t_1, \ldots, t_n)$ è una *formula atomica* in $\mathcal{L}_1$.

In questo modo, possiamo definire ricorsivamente l'insieme delle formule ben formate fbf di $\mathcal{L}_1$.

Definizione 4.5. [Regole in $R(\mathcal{L}_1)$] L'insieme $Form_1$ delle fbf di $\mathcal{L}_1$ è il più piccolo insieme chiuso rispetto alle seguenti regole

- se $\varphi \equiv P_i^n(t_1, \ldots, t_n)$, allora $\varphi \in Form_1$;
- se $\varphi \in Form_1$, allora $\neg\varphi \in Form_1$;
- se $\varphi, \psi \in Form_1$, allora $\varphi \wedge \psi \in Form_1$;
- se $\varphi, \psi \in Form_1$, allora $\varphi \vee \psi \in Form_1$;
- se $\varphi, \psi \in Form_1$, allora $\varphi \rightarrow \psi \in Form_1$;
- se $\varphi \in Form_1$ e $x \in Var_1$, allora $\forall x\varphi \in Form_1$;
- se $\varphi \in Form_1$ e $x \in Var_1$, allora $\exists x\varphi \in Form_1$.

Una proposizione di tipo $\forall x\varphi$ è una proposizione *universale* in cui φ è l'espressione *universalizzata*; mentre, una proposizione di tipo $\exists x\varphi$ è una proposizione *esistenziale* in cui φ è l'espressione *esistenzializzata*.

Osservazione 4.1. Una proposizione universale corrisponde a una *congiunzione illimitata*. Similmente, una proposizione esistenziale corrisponde a una *disgiunzione illimitata*. Poiché ogni formula è una successione finita di segni, il nostro linguaggio non ci consente di costruire congiunzioni e disgiunzioni illimitate. Pertanto, l'uso dei quantificatori è fondamentale.

Definizione 4.6. [*Ambito di un quantificatore*] L'*ambito* (o raggio d'azione) di un quantificatore è la formula che lo segue direttamente.

Ad esempio, l'ambito del quantificatore universale in $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ è $(P(x) \wedge Q(x))$. Se una formula contiene un'iterazione di quantificatori allora gli ambiti dei quantificatori interagiscono. In $\forall x\exists y(P(y, x))$ l'ambito di $\exists y$ è $P(x, y)$ e si dice che $\exists y$ ha ambito *stretto*, invece l'ambito di $\forall x$ è l'intera formula $\exists y(P(y, x))$ e si dice che $\forall x$ ha ambito *largo*.

Definizione 4.7. [*Variante vincolata e libera*] Una variabile è *vincolata* se cade entro l'ambito di un quantificatore che si applica ad essa, altrimenti è *libera*.

In $\forall x S(x, y)$, ad esempio, la variabile x è vincolata mentre la variabile y è libera.

Definizione 4.8. [*Formula chiusa e aperta*] Una formula si dice *chiusa* se non ha variabili individuali libere. Altrimenti si dice *aperta*.

Talvolta è opportuno esplicitare l'occorrenza libera di una variabile in una formula. Ad esempio, se x occorre liberamente in φ allora si può scrivere $\varphi \equiv \varphi(x)$. Così $\varphi(x) \equiv Px \vee \forall y P(x, y)$ è un'espressione sensata perché in $\forall y P(x, y)$ x occorre liberamente. Al contrario, non avrebbe senso scrivere $\varphi(x, y) \equiv Px \vee \forall y P(x, y)$, perché la y occorre nella formula solo vincolata. Avrebbe senso invece scrivere $\varphi(x, y) \equiv Px \vee \forall x P(x, y)$ poiché in quest'ultima formula la x compare almeno una volta libera e la y sempre.

Un altro importante concetto della logica del prim'ordine è quello di sostituzione. La *teoria della sostituzione* si occupa proprio dei requisiti che le sostituzioni devono possedere per essere *legittime*.

Definizione 4.9. [*Funzione di sostituzione per termini*] Una sostituzione per termini $t[x/u]$ su un linguaggio $\mathcal{L}_1$ è una funzione

$$\sigma : Var_1 \longrightarrow Ter_1$$

tale che

$$t[x/u] \begin{cases} a & \text{se } t \equiv a \\ u & \text{se } t \equiv x \\ y & \text{se } t \equiv y \end{cases}$$

Con $t[x/u]$ si intende il risultato dell'operazione di sostituzione per termini come il termine che si ottiene sostituendo tutte le occorrenze di x in t con il termine u. Se t coincide con x, il risultato è u; al contrario, se t è diversa da x allora la sostituzione è nulla e il risultato rimane t.

Naturalmente, la funzione può essere facilmente estesa in un *endomorfismo* $\sigma : Ter_1 \longrightarrow Ter_1$ sull'algebra dei termini imponendo che la mappatura rispetti i funtori e tale che per ogni $f_i^n \in Fun$

$$\sigma(f_1^n(t_1, \ldots, t_n)) = f_i^n(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n))$$

Definizione 4.10. [*Funzione di sostituzione per formule*] Una sostituzione per formule $\varphi[x/u]$ su un linguaggio $\mathcal{L}_1$ è una funzione

$$\sigma : Form_1 \longrightarrow Form_1$$

tale che per ogni $P_i^n \in Pre$:

Base: φ è atomica, ossia $\varphi \equiv P_i^n(t_1, \ldots, t_n)$, allora

$$P_i^n(t_1, \ldots, t_n)[x/u] \equiv P_i^n(t_1[x/u], \ldots, t_n[x/u])$$

Passo: φ è molecolare o quantificata

a) φ è molecolare

- se $\varphi \equiv \neg\psi$, allora $(\neg\psi)[x/u] = \neg\psi[x/u]$;
- se $\varphi \equiv \psi \wedge \gamma$, allora $(\psi \wedge \gamma)[x/u] = \psi[x/u] \wedge \gamma[x/u]$;
- se $\varphi \equiv \psi \vee \gamma$, allora $(\psi \vee \gamma)[x/u] = \psi[x/u] \vee \gamma[x/u]$;
- se $\varphi \equiv \psi \to \gamma$, allora $(\psi \to \gamma)[x/u] = \psi[x/u] \to \gamma[x/u]$

in altri termini

- $\sigma(\neg\psi) = \neg\sigma(\psi)$;
- $\sigma(\psi \wedge \gamma) = \sigma(\psi) \wedge \sigma(\gamma)$;
- $\sigma(\psi \vee \gamma) = \sigma(\psi) \vee \sigma(\gamma)$;
- $\sigma(\psi \to \gamma) = \sigma(\psi) \to \sigma(\gamma)$.

b) φ è quantificata
b_1) $\varphi \equiv \forall y\psi$, allora

$$(\forall y\psi)[x/u] \begin{cases} \forall y\psi[x/u] & \text{se } x \not\equiv y \\ \forall y\psi & \text{se } x \equiv y \end{cases}$$

Osserviamo che nel secondo caso la sostituzione è nulla, in quanto la sostituzione *opera a vuoto*. Infatti se $x \equiv y$, la variabile da sostituire è vincolata, vale a dire non più soggetta alla sostituzione. Una variabile libera indica un posto vuoto in un'espressione. Quando la variabile viene vincolata, quel posto vuoto non esiste più e la variabile non può più essere sostituita. In altri termini

- $\sigma(\forall y\psi) = \forall y(\sigma(\psi))$

b_2) $\varphi \equiv \exists y\psi$, allora:

$$\exists y\psi[x/u] \begin{cases} \exists y\psi[x/u] & \text{se } x \not\equiv y \\ \exists y\psi & \text{se } x \equiv y \end{cases}$$

Anche in questa circostanza, nel secondo caso la sostituzione è nulla. Quindi, è essenziale rispettare la richiesta che nessun termine risulti vincolato in ψ dopo la sostituzione se prima non lo era. Ovvero

- $\sigma(\exists y\psi) = \exists y(\sigma(\psi))$

Definizione 4.11. [*Criterio di sostituzione legittima*] La sostituzione di x con u in φ è legittima $\mathrm{Leg}(\varphi)[x/u]$ se e solo se u non viene a trovarsi vincolata a sostituzione avvenuta. In altre parole, l'espressione $\mathrm{Leg}(\varphi)[x/u]$ dichiara che il termine u non si trovi sotto vincolo dopo che la sostituzione di x con u è stata effettuata.

Generalizziamo ora al contesto della logica del primo'ordine le nozioni di grado di complessità di una formula e di sottoformula viste per la logica proposzionale.

Definizione 4.12. [*Grado di complessità di una formula*]

- se φ è atomica, ossia $\varphi \equiv P_i^n(t_1, \ldots, t_n)$, allora $\#(\varphi) = 0$;
- se $\varphi \equiv \neg\psi$, allora $\#(\varphi) = \#(\psi) + 1$;
- se $\varphi \equiv \psi \wedge \gamma$, allora $\#(\varphi) = \#(\psi) + \#(\gamma) + 1$;
- se $\varphi \equiv \psi \vee \gamma$, allora $\#(\varphi) = \#(\psi) + \#(\gamma) + 1$;
- se $\varphi \equiv \psi \to \gamma$, allora $\#(\varphi) = \#(\psi) + \#(\gamma) + 1$;
- $\varphi \equiv \forall x\psi$, allora $\#(\varphi) = \#(\psi) + 1$;
- $\varphi \equiv \exists x\psi$, allora $\#(\varphi) = \#(\psi) + 1$.

Definizione 4.13. [*Sottoformula immediata del prim'ordine*]

(a) φ, ψ sono sottoformule immediate delle formule $\varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi, \varphi \to \psi$ e φ è sottoformula immediata di $\neg\varphi$;
(b) se φ è una formula della forma $\forall x\varphi$ oppure $\exists x\varphi$ per qualche variabile x, allora, per ogni costante a, la formula $\varphi[x/a]$ è una sottoformula immediata di φ.

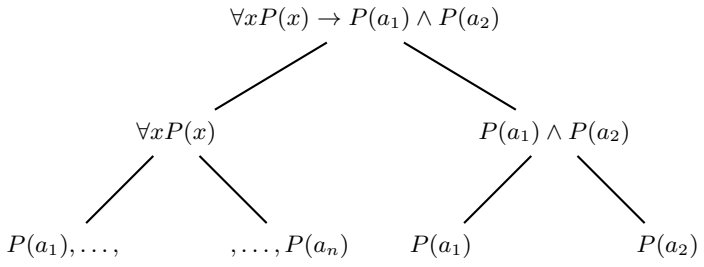
Con la definizione di sottoformula immediata nella logica del prim'ordine, adeguiamo anche la costruzione dell'albero di struttura.

Definizione 4.14. L'albero di struttura di una formula del prim'ordine è un albero in cui ogni punto finale è una formula atomica e tale che, per ogni altro punto γ, vale la seguente condizione

- se γ è della forma $(\varphi \star \psi)$, con $\star \in \{\wedge, \vee, \to\}$, oppure è della forma $\neg\varphi, \forall x\varphi, \exists x\varphi$, allora i suoi successori sono esattamente le sue sottoformule immediate.

Un esempio di albero di struttura è il seguente.

Esempio 4.2. Albero di struttura per $\forall x P(x) \to P(a_1) \wedge P(a_2)$



Una differenza significativa rispetto alla logica proposizionale si nota immediatamente: mentre in quest'ultima gli alberi di formazione delle formule sono sempre *finitamente generati*, nella logica del prim'ordine la ricchezza del linguaggio permette di formare un'*infinità numerabile di formule*. Infatti, ogni formula della forma $\forall x P(x)$ o $\exists x P(x)$ ammetterà un'infinità numerabile di successori: tanti quante sono le costanti individuali. Infine, si dice che un'occorrenza di ψ è una sottoformula di φ se essa occorre nell'albero di formazione di φ.

4.3 Semantica della logica del primo ordine

Un modello per il linguaggio $\mathcal{L}_1$ della logica dei predicati classica è costituito da un dominio di individui e da una funzione di interpretazione per individui e per predicati. La funzione di interpretazione stabilisce una corrispondenza tra: *i*) ogni costante individuale e un elemento all'interno del dominio; e *ii*) ogni predicato a n posti e un insieme di sequenze di n individui D^n del dominio. D^n è quindi l'*n*-esimo prodotto cartesiano di D: ad esempio, $D^3 = D \times D \times D$. I predicati sono, quindi, interpretati *estensionalmente*, il che significa che un predicato a 1 posto, come ad esempio "essere giallo", viene interpretato sull'estensione della proprietà a cui corrisponde, ovvero come l'insieme di tutti gli individui che hanno quella proprietà; allo stesso modo, un predicato a 2 posti, come ad esempio "ama", è interpretato sull'estensione della relazione a cui corrisponde, ovvero come l'insieme di tutte le coppie ordinate di individui che soddisfano quella relazione. In questo modo, "l'interpretazione del linguaggio della logica dei predicati classica non è ontologicamente impegnata: non si prende posizione circa l'esistenza di attributi universali" (Giordani 2016, p. 198). Dunque, una valutazione delle formule di $\mathcal{L}_1$ definisce come mappare termini su oggetti del dominio D in modo da preservare le relazioni sintattiche delle formule.

Definizione 4.15. [*Modello per* $\mathcal{L}_1$] Un *modello* per $\mathcal{L}_1$ è una coppia $M = (D, i)$, dove D è un insieme non vuoto detto dominio, e i è una funzione di *interpretazione* tale che

$$i : \{\{a_i\}, \{P_i^n\}, \{f_i^n\}\} \longrightarrow D$$

- $i(a_i) \in D$, i assegna ad ogni costante individuale a un elemento in D;
- $i(P_i^n) \subseteq D^n$, i assegna ad ogni predicato *n*-ario P una relazione *n*-aria su D;
- $i(f_i^n) : D^n \longrightarrow D$, i assegna ad ogni simbolo di funzione *n*-ario f una funzione *n*-aria su D.

L'insieme dei modelli per $\mathcal{L}_1$ è indicato con $\mathbf{M}_1$. Se la costante predicativa è a un argomento P_i^1, allora $i(P_i^1) \subseteq D$. Se la costante predicativa è a due argomenti P_i^2, allora $i(P_i^2) \subseteq D^2$ le associa una relazione binaria in D, ossia un sottoinsieme del prodotto

cartesiano $D^2 = D \times D$. In generale, se la costante predicativa è a n argomenti P_i^n, allora $i(P_i^n) \subseteq D^n$.

Definizione 4.16. [*Valutazione per i termini di $\mathcal{L}_1$*] Una valutazione per i termini di un linguaggio $\mathcal{L}_1$ rispetto a un modello M è così definita

$$v : Ter \longrightarrow D$$

tale che

- se $t = a_i \in Cost,$ allora $v = i(a_i)$;
- se $t = x_i \in Var_1,$ allora $v = i(x_i)$;
- se $f_i^n \in Fun$ e $t_1, \ldots, t_n \in Ter,$ allora $v(f_i^n(t_1, \ldots, t_n) = i(f_i^n)(v(t_1, \ldots, t_n))$.

Introduciamo ora un'importante convenzione notazionale, utile per definire le condizioni di verità di una formula in un modello. Dato un linguaggio $\mathcal{L}_1$, un modello M, una formula φ e un elemento $d \in D$, con la scrittura $\varphi[x/\tilde{d}]$ denoteremo la formula del linguaggio $\mathcal{L}_1^{\tilde{d}} = \mathcal{L}_1 \cup \{\tilde{d}\}$ ottenuta sostituendo tutte le occorrenze della variabile x in φ con una nuova costante $\tilde{d} \notin \mathcal{L}_1$.

Definizione 4.17 [*Soddisfacibilità in M*] Una valutazione per le formule di un linguaggio $\mathcal{L}_1$ rispetto a un modello M è definita induttivamente come segue

$$v : Form_1 \longrightarrow \{1, 0\}$$

tale che

- $v(P_n^i(t_1, \ldots, t_n)) = \begin{cases} 1 & \text{sse } (v(t_1), \ldots, v(t_n)) \in i(P_i^n) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$;
- $v(\neg\varphi) = 1$ sse $v(\varphi) = 0$;
- $v(\varphi \wedge \psi) = 1$ sse $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 1$;
- $v(\varphi \vee \psi) = 1$ sse $v(\varphi) = 1$ o $v(\psi) = 1$;
- $v(\varphi \rightarrow \psi) = 1$ sse $v(\varphi) = 0$ o $v(\psi) = 1$;
- $\forall x\varphi = 1$ sse per ogni $d \in D, v(\varphi[x/\tilde{d}]) = 1$;
- $\exists x\varphi = 1$ sse per qualche $d \in D, v(\varphi[x/\tilde{d}]) = 1$.

Definizione 4.18. [*Variante di un modello per $\mathcal{L}_1$*] Dato un modello $M = (D, i)$ per $\mathcal{L}_1$, una *variante per un modello* è una coppia $M[a/d] = (D, i[a/d])$ in cui $i[a/d]$ è una funzione che coincide esattamente con i per tutti gli argomenti diversi da a e tale che $i(a)[a/d] = d \in D$. Pertanto, una variante di un modello è un modello in cui una costante individuale è stata utilizzata per nominare un certo individuo.

Definizione 4.19. [*Modello descrittivo per $\mathcal{L}_1$*] Un *modello descrittivo* per $\mathcal{L}_1$ è un modello per $\mathcal{L}_1$ in cui, per ogni $d \in D$, esiste una costante individuale a tale che

$i(a) = d$. Quindi, un modello descrittivo è un modello in cui a ogni individuo del dominio è associato un nome.

Esempio 4.3. Consideriamo $\mathcal{L}_1$ come il linguaggio che descrive questo mondo possibile. In particolare, assumiamo che: ogni cella del nostro mondo contenga una figura geometrica colorata e i primi quattro nomi del linguaggio siano usati per designare le costanti individuali triangolo, quadrato, cerchio e rombo; i primi tre predicati a 1 posto del linguaggio siano usati per designare la proprietà di essere blu, giallo e arancione; il primo predicato a 2 posti del linguaggio sia usato per designare la relazione di essere sopra; mentre il secondo predicato a 2 posti del linguaggio sia usato per designare la relazione di essere a destra. Il modello che cattura questa interpretazione è il seguente ed è raffigurato in FIG. 4.1

- $D = \{triangolo, quadrato, cerchio, rombo\}$;
- $i(a_1) = triangolo$;
- $i(a_2) = quadrato$;
- $i(a_3) = cerchio$;
- $i(a_4) = rombo$;
- $i(P_1^1) = \{triangolo, rombo\}$;
- $i(P_2^1) = \{quadrato\}$;
- $i(P_3^1) = \{cerchio\}$;
- $i(P_1^2) = \{(triangolo, cerchio), (quadrato, rombo)\}$;
- $i(P_2^2) = \{(quadrato, triangolo), (rombo, cerchio)\}$.

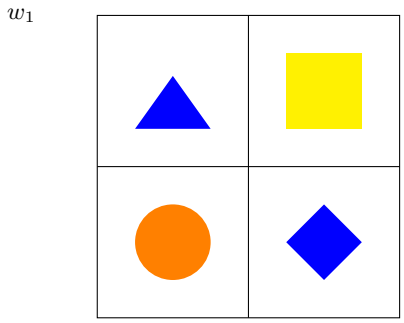


Figura 4.1: Un mondo possibile che raffigura il modello.

Intuitivamento, la funzione di interpretazione può essere intesa come una funzione di *etichettamento*. Supponendo che ogni nome corrisponda a un'etichetta assegnabile agli individui nel nostro dominio, la funzione di valutazione si configura come segue

1. Assegna le etichette con costanti individuali a individui in D (FIG. 4.2)[5]

[5] Nelle figure successive a FIG. 4.2 ometteremo di etichettare le frecce con v, essendo esplicito che si tratti, simbolicamente, della funzione di valutazione.

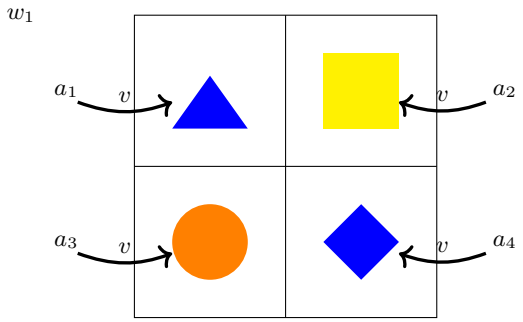


Figura 4.2: Etichettamento delle costanti individuali a individui in D.

2. Assegna le etichette con predicati a un posto a più individui in D (FIG. 4.3)

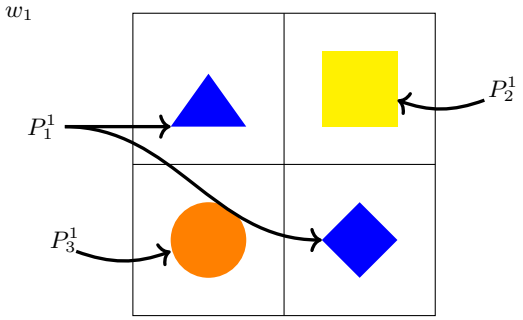


Figura 4.3: Etichettamento dei predicati a un posto a più individui in D.

3. Assegna le etichette con predicati a n posti a più sequenze di n individui in D (FIG. 4.4)

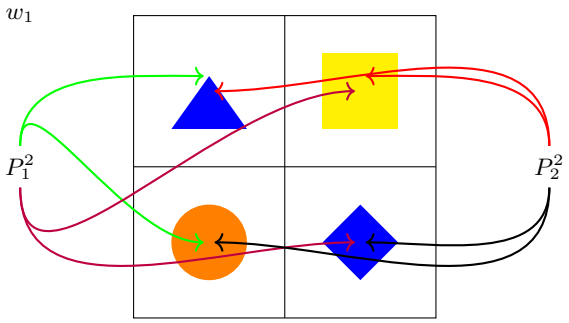


Figura 4.4: Etichettamento dei predicati a n posti a più sequenze di n individui in D.

La distinzione tra costanti individuali e predicati è ben definita. Una costante individuale viene assegnata a uno e un solo individuo. I predicati, invece, possono essere assegnati a più individui, se stanno per attributi a un posto, o a più sequenze di n individui, se stanno per attributi a n posti. Per questo motivo, i predicati sono considerati costanti universali poiché, secondo la definizione classica, possono essere predicati di molti: *id quod est predicari de pluribus*. Infine, dato il modello dell'*Esempio 4.3.*, una variante può essere questa: $i[a_2/cerchio]$ (FIG. 4.5).

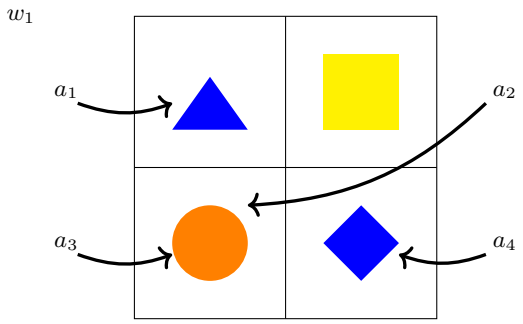


Figura 4.5: Variante del modello con $i[a_2/cerchio]$.

La costante a_2 in questa variante è assegnata al cerchio. Questo implica che una variante di un modello è definita da una variazione di valutazione delle sole costanti individuali: a una costante viene assegnato un individuo che può non coincidere con quello dell'assegnazione originale. Si può notare che

- $i(a)[a/i(a)] = i(a)$, poiché ad a viene assegnato precisamente l'individuo originariamente assegnato;
- $i(a)[a/d_1][a/d_2] = i(a)[a/d_2]$, poiché la seconda variazione modifica la prima variazione di assegnazione.

Definizione 4.20. [*Verità di una formula in un modello per $\mathcal{L}_1$*] La definizione di verità di una proposizione in un modello per $\mathcal{L}_1$ è induttiva. Analizziamo prima le proposizioni non quantificate

- $M \vDash P_i^n(a_1, \ldots, a_n)$ sse $i(a_1, \ldots, a_n) \in i(P_i^n)$;
- $M \vDash \neg\varphi$ sse $M \nvDash \varphi$;
- $M \vDash \varphi \wedge \psi$ sse $M \vDash \varphi$ e $M \vDash \psi$;
- $M \vDash \varphi \vee \psi$ sse $M \vDash \varphi$ o $M \vDash \psi$;
- $M \vDash \varphi \rightarrow \psi$ sse $M \nvDash \varphi$ o $M \vDash \psi$.

In questa definizione, $a_1, \ldots, a_n$ è una sequenza di n costanti individuali e $i(a_1, \ldots, a_n)$ è la sequenza degli individui nominati dalle costanti sotto l'interpretazione i. Intuitivamente, una proposizione elementare è vera in un modello M quando gli individui

designati dalle costanti individuali sono nell'estensione assegnata al predicato. Ad esempio, se consideriamo w_1 scriveremo che

- $M \vDash P_1^1(a_1, a_4)$, infatti $i(a_1, a_4) \in i(P_1^1) = \{triangolo, rombo\}$;
- $M \nvDash P_1^1(a_1, a_2)$.

Se $P_i^n(a_1, \ldots, a_n)$ è vera in M, allora diciamo anche che $P_i^n(a_1, \ldots, a_n)$ è vera di $i(a_1, \ldots, a_n)$.

Caso 1: modelli descrittivi

- $M \vDash \forall x\varphi$ sse $M \vDash \varphi[x/a]$, per ogni a;
- $M \vDash \exists x\varphi$ sse $M \vDash \varphi[x/a]$, per qualche a.

La definizione di verità proposta non crea problemi se consideriamo solo i modelli descrittivi. Questo perché, in tali modelli, ogni individuo del dominio è identificato da un nome, permettendo di stabilire le condizioni di verità delle proposizioni quantificate semplicemente analizzando le istanze delle proposizioni stesse. Ad esempio in w_1 è corretto scrivere

- $M \nvDash \forall x P_1^1(x)$;
- $M \vDash \exists x P_1^1(x)$.

Tuttavia, se consideriamo la classe di tutti i modelli in generale, potremmo incontrare domini in cui non ogni elemento è nominato da una costante individuale. In queste situazioni, le condizioni di verità delle proposizioni quantificate possono essere date in termini di varianti di un modello.

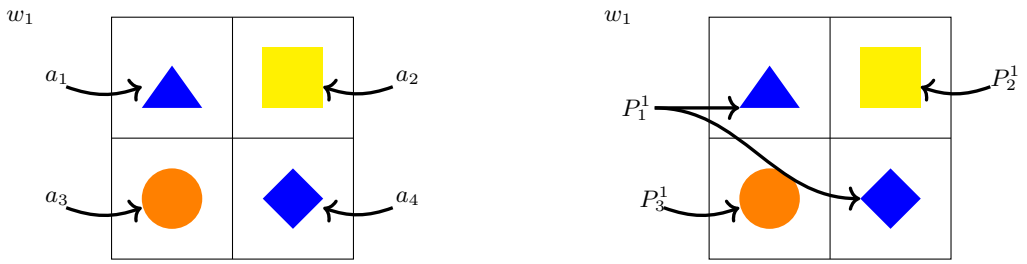
Caso 2: modelli generali

- $M \vDash \forall x\varphi$ sse $M[\tilde{a}/d] \vDash \varphi[x/\tilde{a}]$, per ogni $d \in D$, per una $\tilde{a}$ non in $\forall x\varphi$;
- $M \vDash \exists x\varphi$ sse $M[\tilde{a}/d] \vDash \varphi[x/\tilde{a}]$, per qualche $d \in D$, per una $\tilde{a}$ non in $\exists x\varphi$.

Una proposizione universale come $\forall x\varphi$ è considerata vera in un modello M quando la proposizione $\varphi[x/\tilde{a}]$ è vera di ogni individuo a cui il nome $\tilde{a}$ può essere assegnato. Allo stesso modo, una proposizione esistenziale come $\exists x\varphi$ è vera in un modello M quando la proposizione $\varphi[x/\tilde{a}]$ è vera di qualche individuo a cui il nome $\tilde{a}$ può essere assegnato[6].

Esempio 4.4. $P_1^1(a_1)$ è vera nel modello dell'esempio precedente, perché l'individuo $i(a_1)$ nominato da a_1 in M, ossia triangolo, è nell'estensione della proprietà $i(P_1^1)$ nominata da P_1^1 in M, ossia $\{triangolo, rombo\}$. Infatti lo stesso individuo porta sia l'etichetta a_1 sia l'etichetta P_1^1 (FIG. 4.6).

[6] Per un'introduzione alla teoria dei modelli si veda (Marcja & Toffalori 1998) e (Marker 2002), mentre per uno studio più completo (Hodges 1993).



(a) Figura 4.6.1 (b) Figura 4.6.2

Figura 4.6: Rappresentazione grafica dell'*Esempio 4.4*.

Se Γ è un insieme di proposizioni di $\mathcal{L}_1$

$$M \vDash \Gamma \quad \text{sse} \quad M \vDash \varphi, \text{ per ogni } \varphi \in \Gamma$$

Le altre definizioni semantiche in $\mathcal{L}_1$ sono standard.

Definizione 4.21. [*Verità logica in $\mathcal{L}_1$*]

$$\Vdash_{\mathbf{M}_1} \varphi \text{ sse per ogni } M \in \mathbf{M}_1, M \vDash \varphi$$

$\varphi \in \mathcal{L}_1$ è una verità logica quando ogni modello possibile verifica φ.

Definizione 4.22. [*Conseguenza logica in $\mathcal{L}_1$*]

$$\Gamma \Vdash_{\mathbf{M}_1} \varphi \text{ sse per ogni } M \in \mathbf{M}_1, \text{ se } M \vDash \Gamma \text{ allora } M \vDash \varphi$$

$\varphi \in \mathcal{L}_1$ è conseguenza logica di $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_1$ quando ogni modello di Γ verifica φ.

Definizione 4.23. [*Soddisfacibilità in $\mathcal{L}_1$*]

$$Sod_{\mathbf{M}_1}(\Gamma) \text{ sse per qualche } M \in \mathbf{M}_1, M \vDash \Gamma$$

$\Gamma \subseteq \mathcal{L}_1$ è soddisfacibile quando qualche modello verifica Γ.

Definizione 4.24. [*Equivalenza logica in $\mathcal{L}_1$*]

$$\varphi \equiv_{\mathbf{M}_1} \psi \quad \text{sse} \quad (\varphi \Vdash_{\mathbf{M}_1} \psi \text{ e } \psi \Vdash_{\mathbf{M}_1} \varphi)$$

φ e ψ sono logicamente equivalenti quando sono consguenza l'una dell'altra.

Definizione 4.25. [*Validità di un'inferenza in $\mathcal{L}_1$*] Un'inferenza in $\mathcal{L}_1$ è definita come un'inferenza le cui premesse e la cui conclusione sono proposizioni in $\mathcal{L}_1$. Tale inferenza è considerata valida se e solo se la sua conclusione è una conseguenza logica delle sue premesse.

La definizione di verità che abbiamo proposto conferma la nostra intuizione sui quantificatori: l'inclusione proposizionale è interpretata come implicazione, mentre l'esclusione proposizionale è interpretata come implicazione della negazione

Definizione 4.26. [*Interpretazione semantica* $\forall$] Una proposizione universale include le sue istanze ed è inclusa da ogni proposizione che include una sua istanza generica

1. $\forall x\varphi \to \varphi[x/a]$
2. se $\psi \to \varphi[x/a]$ con a generica, allora $\psi \to \forall x\varphi$

Definizione 4.27. [*Interpretazione semantica* $\exists$] Una proposizione esistenziale è inclusa dalle sue istanze e include ogni proposizione inclusa da una sua istanza generica

1. $\varphi[x/a] \to \exists x\varphi$
2. se $\varphi[x/a] \to \psi$ con a generica, allora $\exists x\varphi \to \psi$

La nozione di spazio logico per una proposizione in $\mathcal{L}_1$ ricalca la definizione già presentata per la logica proposizionale classica.

Definizione 4.28. [*Spazio logico di una proposizione in* $\mathcal{L}_1$] Lo spazio logico di una formula $\varphi \in \mathcal{L}_1$ è la classe di modelli in cui la formula è vera: $M[\varphi] = \{M \in \mathbf{M}_1 | M \vDash \varphi\}$. Lo spazio logico di un insieme di formule $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_1$ è la classe di modelli in cui ogni formula dell'insieme è vera: $M[\Gamma] = \{M \in \mathbf{M}_1 | M \vDash \Gamma\}$. Lo spazio logico totale o complessivo è la classe $\mathbf{M}_1$ di tutti i modelli per $\mathcal{L}_1$. Naturalmente, lo spazio logico di una contraddizione è nullo $= \emptyset$: nessun modello verifica la contraddizione.

Proposizione 4.1. [*Identità fondamentali*]

1. $M[\forall x\varphi] = \bigcap_{d\in D} M[\tilde{a}/d][\varphi[x/\tilde{a}]]$ con $\tilde{a}$ non in $\forall x\varphi$;
2. $M[\exists x\varphi] = \bigcup_{d\in D} M[\tilde{a}/d][\varphi[x/\tilde{a}]]$, con $\tilde{a}$ non in $\exists x\varphi$.

Dimostrazione. La dimostrazione si ottiene dalla definizione di spazio logico e dalla definizione di verità di una proposizione.

1. $M \in M[\forall x\varphi]$ sse $M \vDash \forall x\varphi$ sse $M[\tilde{a}/d] \vDash \varphi[x/\tilde{a}],$ per ogni $d \in D,$ $\tilde{a}$ non in $\forall x\varphi$. Quindi, $M \in \bigcap_{d\in D} M[\tilde{a}/d][\varphi[x/\tilde{a}]],$ con $\tilde{a}$ non in $\forall x\varphi$;
2. $M \in M[\exists x\varphi]$ sse $M \vDash \exists x\varphi$ sse $M[\tilde{a}/d] \vDash \varphi[x/\tilde{a}],$ per qualche $d \in D,$ $\tilde{a}$ non in $\exists x\varphi$. Quindi, $M \in \bigcup_{d\in D} M[\tilde{a}/d][\varphi[x/\tilde{a}]],$ con $\tilde{a}$ non in $\exists x\varphi$.

□

Corollario 4.1. [*Inclusione ed equivalenza logica*]

(*i*) $\varphi \Vdash_{\mathbf{M}_1} \psi$ sse $M[\varphi] \subseteq M[\psi]$;
(*ii*) $\varphi \equiv_{\mathbf{M}_1} \psi$ sse $M[\varphi] = M[\psi]$.

Corollario 4.2. [*Verità logica, conseguenza logica, soddisfacibilità*]

(*i*) $\Vdash_{\mathbf{M}_1} \varphi$ sse $M[\varphi] = \mathbf{M}_1$;
(*ii*) $\Gamma \Vdash_{\mathbf{M}_1} \varphi$ sse $M[\Gamma] \subseteq M[\varphi]$;
(*iii*) $Sod_{\mathbf{M}_1}(\Gamma)$ sse $M[\Gamma] \neq \emptyset$;
(*iv*) $Sod_{\mathbf{M}_1}(\Gamma, \varphi)$ sse $M[\Gamma] \cap M[\varphi] \neq \emptyset$.

La connessione tra la relazione di conseguenza logica e quella di soddisfacibilità di insiemi di formule e formule, ci consente di concludere che anche nella logica del prim'ordine una formula φ è

- conseguenza logica di Γ se e solo se $\neg\varphi$ non è soddisfacibile con Γ;
- soddisfacibile con Γ se e solo se $\neg\varphi$ non è conseguenza logica di Γ.

Definzione 4.29. [*Libro di un modello in $\mathcal{L}_1$*]

Il libro di un modello $M \in \mathbf{M}_1$ è l'insieme $\mathcal{L}_M = \{\varphi | M \vDash \varphi\}$ delle formule che sono vere in M. Quindi, per ogni $\varphi \in \mathcal{L}_1$, $M \vDash \varphi$ sse $\varphi \in \mathcal{L}_M$, da cui si deriva che $M \vDash \mathcal{L}_M$: ogni modello verifica il proprio libro.

È possibile notare come, similmente a quanto avviene per la logica proposizionale, per stabilire se una proposizione quantificata sia presente all'interno di un modello descrittivo sia sufficiente consultare il libro del modello in questione. L'insieme di tutti i libri dei modelli in un linguaggio $\mathcal{L}_1$ forma la sua biblioteca, la quale racchiude le descrizioni di ogni mondo possibile descrivibile attraverso $\mathcal{L}_1$. Risulta evidente che la biblioteca di $\mathcal{L}_1$ è notevolmente più vasta rispetto a quella di $\mathcal{L}_0$, dal momento che il linguaggio $\mathcal{L}_1$ possiede un potenziale descrittivo superiore. Di conseguenza, la consultazione del libro del mondo attuale ci offrirebbe decisamente più informazioni:

> La ricchezza della nostra conoscenza del mondo dipende sia da quanto siamo in grado di leggere nel libro del mondo sia quanto è profondo il linguaggio, e quindi il libro, che siamo in grado di leggere. (Giordani 2016, p. 210)

4.4 Tableaux analitici per la logica del primo ordine

Come nel calcolo proposizionale, anche le dimostrazioni nel calcolo dei tableaux per la logica del prim'ordine mantengono un approccio per refutazione. La strategia per dimostrare una formula φ consiste nel cercare sistematicamente di derivare una contraddizione dalla sua negazione. Di conseguenza, una formula φ è dimostrata se il tableau per $\neg\varphi$ risulta chiuso. Se uno dei rami del tableau per $\neg\varphi$ dovesse rimanere aperto, è possibile costruire a partire da esso un modello in cui $\neg\varphi$ è vera, fornendo così un contromodello per φ. Inoltre, poiché il linguaggio del calcolo dei predicati condivide gli operatori logici verofunzionali con il linuaggio proposizionale, le regole di inferenza per i connettivi logici del calcolo del prim'ordine dei tableaux saranno le stesse che nel caso proposizionale, ossia

- tipo α : $(\neg\neg)$, $(\wedge)$, $(\neg\vee)$, $(\neg, \rightarrow)$;
- tipo β : $(\neg\wedge)$, $(\vee)$, $(\rightarrow)$.

Sulla base degli assunti semantici sviluppati nella sezione precedente, introduciamo le nuove regole di inferenza per il calcolo dei predicati.

Regole per i Tableaux Analitici

– *Regole della quantificazione universale*

$$\begin{array}{c} \forall x\varphi(x) \\ | \\ \varphi[x/a_{\downarrow}] \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \neg\forall x\varphi(x) \\ | \\ \neg\varphi[x/a_{\uparrow}] \end{array}$$

dove $a_{\downarrow}$ è una *qualunque* costante individuale — dove $a_{\uparrow}$ è una *nuova* costante individuale

– *Regole della quantificazione esistenziale*

$$\begin{array}{c} \exists x\varphi(x) \\ | \\ \varphi[x/a_{\uparrow}] \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \neg\exists x\varphi(x) \\ | \\ \neg\varphi[x/a_{\downarrow}] \end{array}$$

dove $a_{\uparrow}$ è una *nuova* costante individuale — dove $a_{\downarrow}$ è una *qualunque* costante individuale

La variante notazione $a_{\downarrow}$ denota l'espansione di un ramo del tableau *per ogni costante individuale* $a_{\downarrow} = a_1, \ldots, a_n$ che è già stata utilizzata in quel ramo; mentre $a_{\uparrow}$ denota l'espansione di un ramo del tableau *con una nuova costante individuale* $a_{\uparrow} = a_i$ non ancora presente nel ramo. Le regole di inferenza per il calcolo dei predicati catturano quindi la seguenti intuizioni

- la regola della quantificazione universale $(\forall)$ stabilisce che una proposizione del tipo $\forall x\varphi$ è vera in un modello M se e solo se la formula φ è vera in M *per ogni* individuo assegnato come valore alla variabile x. Supponiamo che $\varphi \equiv P(x)$, allora perché $\forall xP(x)$ sia vera occorre che *per tutti gli individui* a del dominio, $P(a)$ sia vera in M. Pertanto, per analizzare una formula $\forall x\varphi$ dobbiamo espandere il ramo del tableau in cui compare, aggiungendo una formula $\varphi[x/a_{\downarrow}]$. Se non abbiamo ancora introdotto alcuna costante individuale, ne va introdotta una nuova appositamente. Ciò è sempre possibile, poiché i domini non sono mai vuoti;
- la regola della negazione della quantificazione universale $(\neg\forall)$ stabilisce che una proposizione del tipo $\neg\forall x\varphi$ è vera in un modello M se e solo se la formula φ è falsa *per almeno* un individuo del dominio di M assegnato come valore alla variabile x. Supponiamo che $\varphi \equiv P(x)$, allora perché $\neg\forall xP(x)$ sia vera dovrà esserci un individuo a del dominio, tale per cui $P(a)$ sia falsa in M. Per analizzare

una formula come $\neg\forall x\varphi$ dobbiamo allora espandere il ramo con un nodo in cui compare $\neg\varphi[x/a_\uparrow]$;

- la regola della quantificazione esistenziale ($\exists$) stabilisce che una proposizione del tipo $\exists x\varphi$ è vera in un modello M se e solo se la formula φ è vera *per almeno* un individuo del dominio di M assegnato come valore alla variabile x. Supponiamo che $\varphi \equiv P(x)$, allora perché $\exists xP(x)$ sia vera dovrà esserci un individuo a del dominio, tale per cui $P(a)$ sia vera in M. Per analizzare una formula come $\exists x\varphi$ dobbiamo allora espandere il ramo con un nodo in cui compare $\neg\varphi[x/a_\uparrow]$;
- la regola della negazione della quantificazione esistenziale ($\neg\exists$) stabilisce che una proposizione del tipo $\neg\exists x\varphi$ è vera in un modello M se e solo se la formula φ è falsa *per ogni* individuo del dominio di M assegnato come valore alla variabile x. Supponiamo che $\varphi \equiv P(x)$, allora perché $\neg\exists xP(x)$ sia vera occorre che *per tutti gli individui* a del dominio, $P(a)$ sia falsa in M. Pertanto, per analizzare una formula $\neg\exists x\varphi$ dobbiamo espandere il ramo del tableau in cui compare, aggiungendo una formula $\varphi[x/a_\downarrow]$ al ramo. Se non abbiamo ancora introdotto alcuna costante individuale, ne va introdotta una nuova appositamente.

Anche per la logica dei predicati usiamo la classificazione di Smullyan. Le formule quantificate sono classificate da Smullyan come formule di tipo γ e δ. Utilizzando γ e δ come metavariabili rispettivamente per i due tipi di formule, per la logica predicativa avremo due schemi di regole

$$\frac{\gamma}{\gamma(\mathrm{a}_\downarrow)} \qquad \frac{\delta}{\delta(\mathrm{a}_\uparrow)}$$

Più in dettaglio, una formula γ è una formula *universale*, la cui verità dipende da ogni individuo del dominio del modello. Di conseguenza, l'applicazione delle loro regole richiede che vengano istanziate per ogni costante individuale già presente nel ramo. Le formule del tipo γ sono quelle a cui si applicano le regole ($\forall$) e ($\neg\exists$) e catturano quindi la seguente intuizione: da una premessa della forma "ogni x ha la proprietà P" o "nessuna x ha la proprietà P" si deduce il fatto che "a possiede la proprietà P" o "a non possiede la proprietà P", rispettivamente per ogni costante individuale a.

Una formula δ è una formula *esistenziale*, la cui verità è garantita da almeno un individuo del dominio. L'applicazione delle loro regole richiede quindi l'introduzione di una nuova costante individuale, che non è ancora stata utilizzata nel ramo. Le formule di tipo δ sono quelle a cui si applicano le regole ($\exists$) e ($\neg\forall$). Lo schema δ istanzia un processo logico fondamentale nelle dimostrazioni matematiche. Immaginiamo di essere pervenuti nel corso di una dimostrazione matematica a un enunciato della forma "esiste un x tale che $P(x)$" o "non per ogni x vale $\neg P(x)$". In questo contesto, siamo autorizzati a istanziare questa x generica introducendo un nuovo nome, per esempio a. È cruciale che questo individuo a sia considerato *fissato, ma generico*: vi è solo una prova di esistenza di tale oggetto. Di conseguenza, non possiamo utilizzare alcun

nome che abbiamo impiegato per oggetti apparsi in precedenza nella dimostrazione, dato che a potrebbe essere un individuo completamente diverso. Questo giustifica la richiesta che a sia una nuova costante o un nuovo nome.

Schematicamente, possiamo riassumere tutte le regole della logica del prim'ordine nel seguente modo.

Regole dei tableaux analitici per la logica del prim'ordine (notazione a sequenti)

– *Regole di tipo* α (congiuntive)

$$\frac{\neg\neg\varphi}{\varphi}\,\neg\neg \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi, \psi}\,\wedge \qquad \frac{\neg(\varphi \vee \psi)}{\neg\varphi, \neg\psi}\,\neg\vee \qquad \frac{\neg(\varphi \rightarrow \psi)}{\varphi, \neg\psi}\,\neg\rightarrow$$

– *Regole di tipo* β (disgiuntive)

$$\frac{\neg(\varphi \wedge \psi)}{\neg\varphi | \neg\psi}\,\neg\wedge \qquad \frac{\varphi \vee \psi}{\varphi | \psi}\,\vee \qquad \frac{\varphi \rightarrow \psi}{\neg\varphi | \psi}\,\rightarrow$$

– *Regole di tipo* γ (universali)

$$\frac{\forall \mathrm{x}\varphi(\mathrm{x})}{\varphi[\mathrm{x}/\mathrm{a}_{\downarrow}]}\,\forall \qquad \frac{\neg\exists \mathrm{x}\varphi(\mathrm{x})}{\neg\varphi[\mathrm{x}/\mathrm{a}_{\downarrow}]}\,\neg\exists$$

– *Regole di tipo* δ (esistenziali)

$$\frac{\neg\forall \mathrm{x}\varphi(\mathrm{x})}{\neg\varphi[\mathrm{x}/\mathrm{a}_{\uparrow}]}\,\neg\forall \qquad \frac{\exists \mathrm{x}\varphi(\mathrm{x})}{\varphi[\mathrm{x}/\mathrm{a}_{\uparrow}]}\,\exists$$

Rispetto alle formule di tipo α e β, l'applicazione delle regole per le formule di tipo γ e δ richiede maggiore attenzione, ma per ragioni opposte. Le regole per le formule δ richiedono cautela nella scelta della costante individuale. L'individuo denotato dalla nuova costante, introdotta per istanziare la formula, non deve essere stato precedentemente considerato nel ramo. La regola impone quindi l'uso di una nuova costante individuale, non ancora presente nel tableau, per evitare ambiguità e possibili contraddizioni. Al contrario, le regole per le formule γ sono di tipo universale e richiedono di essere applicate per ogni costante già presente nel ramo. Questo perché il risultato dell'applicazione della regola $\gamma[x/a_{\downarrow}]$ deve valere per ogni oggetto del dominio. A differenza delle altre regole, quella per le formule γ può essere applicata più volte e in momenti diversi, man mano che nuove costanti individuali vengono introdotte e considerate nel tableau. Inoltre, poiché i domini possono essere infiniti, è possibile che il numero di modi di applicazione di una regola per una formula γ sia infinito e, conseguentemente, questo può portare ad alberi che non terminano mai. Diremo perciò che le regole di tipo γ e δ *non sono finitarie*.

Per questa ragione, i tableaux *non sono metodo di decisione* per la logica del prim'ordine. Infatti, per insiemi infiniti di costanti individuali l'applicazione della

regola per una formula γ potrebbe continuare all'infinito senza giungere ad alcuna dimostrazione. A differenza della logica proposizionale, quella del prim'ordine risulta quindi *indecidibile*. La dimostrazione di questo importante risultato è attribuita ad Alonzo Church (1903-1995) e Alan Turing (1912-1954) nel 1936. Abbiamo ora tutte le informazioni necessarie per definire rigorosamente la procedura sistematica di costruzione dei tableaux per la logica del prim'ordine.

Definizione 4.30. [*Costruzione tableau per la logica del prim'ordine*] Dato un insieme di formule Γ di $\mathcal{L}_1$, la procedura per costruire un *tableau sistematico* per Γ si articola nel seguente modo

(0) porre $\neg\Gamma$ alla radice dell'albero;

$(n+1)$ per ogni ramo $\mathcal{R}$ dell'albero e per ogni nodo n di $\mathcal{R}$:
- se n contiene α, estendere $\mathcal{R}$ in un ramo $\mathcal{R} \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$;
- se n contiene β, estendere $\mathcal{R}$ in due rami $\mathcal{R} \cup \{\beta_1\}$ e $\mathcal{R} \cup \{\beta_2\}$;
- se n contiene γ, estendere $\mathcal{R}$ in un ramo $\mathcal{R} \cup \{\gamma[x/a_\downarrow]\}$;
- se n contiene δ, estendere $\mathcal{R}$ in un ramo $\mathcal{R} \cup \{\delta[x/a_\uparrow]\}$.

La procedura descritta è dovuta sempre a Smullyan e garantisce tre cose

a) la formula γ è ripresa in considerazione ad ogni nodo in modo da istanziarla esaustivamente con tutte le costanti individuali del linguaggio;
b) le altre formule del ramo sono analizzate in modo che una contraddizione *se c'è* possa essere trovata;
c) se la procedura non termina è perché l'albero ha un ramo infinito.

Definizione 4.31. Un ramo di un tableau sistematico per un insieme Γ di formule di $\mathcal{L}_1$ è terminato se è infinito o se è finito e non può più essere esteso.

Convenzione 4.1. [*Strategia di Palladino*] Nella costruzione dell'albero useremo, qualora possibile, la strategia di esaminare prima i nodi che richiedono regole del tipo α e δ, poi quelli che richiedono regole del tipo γ e, infine, quelli che richiedono regole del tipo β[7].

Diamo ora alcuni esempi di verifica della validità di una formula predicativa usando i tableaux analitici.

Esempio 4.5. [$\Vdash \forall x P(x) \to P(a)$]

Dimostrazione.

$$\nVdash \forall x P(x) \to P(a)$$

1.	$\neg(\forall x P(x) \to P(a))$	Formula negata
2.	$\forall x P(x)$	$(\neg \to)$ da (1)
3.	$\neg P(a)$	$(\neg \to)$ da (1)
4.	$P(a)\times$	$(\forall)$ da (2)

□

[7] Cfr. (Palladino 2002, p. 246).

Esempio 4.6. [$\Vdash \exists x P(x) \to P(a)$]

Dimostrazione.

$$\nVdash \exists x P(x) \to P(a)$$

1.	$\neg(\exists x P(x) \to P(a))$	Formula negata
2.	$\exists x P(x)$	$(\neg \to)$ da (1)
3.	$\neg P(a)$	$(\neg \to)$ da (1)
4.	$P(b)\odot$	$(\exists)$ da (2)

□

Esempio 4.7. ♠ [$\Vdash \exists x(P(x) \to \forall y(P(y)))$]

Dimostrazione.

$$\nVdash \exists x(P(x) \to \forall y(P(y)))$$

1.	$\neg\exists x(P(x) \to \forall y(P(y)))$	Formula negata
2.	$\neg(P(a) \to \forall y(P(y)))$	$(\neg\exists)$ da (1)
3.	$P(a)$	$(\neg \to)$ da (2)
4.	$\neg\forall y(P(y))$	$(\neg \to)$ da (2)
5.	$\neg P(b)$	$(\neg\forall)$ da (4)
6.	$\neg(P(b) \to \forall y(P(y)))$	$(\neg\exists)$ da (1)
7.	$P(b)\times$	$(\neg \to)$ da (6)

□

Si osservi come l'introduzione di una nuova costante individuale b nel nodo (5), renda necessario applicare nuovamente la regola $(\neg\exists)$ nel nodo (6) dal nodo (1).

Esempio 4.8. [$\Vdash \forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \to \forall x(P(x) \vee Q(x))$]

Dimostrazione.

$$\nVdash \forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \to \forall x(P(x) \vee Q(x))$$

1.	$\neg(\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \to \forall x(P(x) \vee Q(x)))$	Formula negata
2.	$\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$	$(\neg \to)$ da (1)
3.	$\neg\forall x(P(x) \vee Q(x))$	$(\neg \to)$ da (1)
4.	$\neg(P(a) \vee Q(a))$	$(\neg\forall)$ da (3)
5.	$\neg P(a)$	$(\neg\vee)$ da (4)
6.	$\neg Q(a)$	$(\neg\vee)$ da (4)
7.	$\forall x P(x)$ $\forall x Q(x)$	$(\vee)$ da (2)
8.	$P(a)\times$ $Q(a)\times$	$(\forall)$ da (7)

□

Esempio 4.9. ♠ [$\Vdash \forall x(P(x) \vee Q(x)) \to \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$]

Dimostrazione.

$$\nVdash \forall x(P(x) \vee Q(x)) \to \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$$

1.	$\neg(\forall x(P(x) \vee Q(x)) \to \forall x P(x) \vee \forall x Q(x))$	Formula negata
2.	$\forall x(P(x) \vee Q(x))$	$(\neg \to)$ da (1)
3.	$\neg(\forall x P(x) \vee \forall x Q(x))$	$(\neg \to)$ da (1)
4.	$\neg \forall x P(x)$	$(\neg \vee)$ da (3)
5.	$\neg \forall x Q(x)$	$(\neg \vee)$ da (3)
6.	$\neg P(a)$	$(\neg \forall)$ da (4)
7.	$\neg Q(b)$	$(\neg \forall)$ da (5)
8.	$P(a) \vee Q(a)$	$(\forall)$ da (2)
9.	$P(b) \vee Q(b)$	$(\forall)$ da (2)
10.	$P(a)\times$ $\quad$ $Q(a)$	$(\vee)$ da (8)
11.	$P(b)\odot$ $\quad$ $Q(b)\times$	$(\vee)$ da (9)

□

Esempio 4.10. ♠ [$\Vdash \forall x(\neg P(x) \vee \neg Q(x)) \to \neg(\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x))$]

Dimostrazione.

$$\nVdash \forall x(\neg P(x) \vee \neg Q(x)) \to \neg(\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x))$$

1.	$\neg(\forall x(\neg P(x) \vee \neg Q(x)) \to \neg(\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)))$	Formula negata
2.	$\forall x(\neg P(x) \vee \neg Q(x))$	$(\neg \to)$ da (1)
3.	$\neg\neg(\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x))$	$(\neg \to)$ da (1)
4.	$\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$	$(\neg\neg)$ da (3)
5.	$\forall x P(x)$	$(\wedge)$ da (4)
6.	$\forall x Q(x)$	$(\wedge)$ da (4)
7.	$P(a)$	$(\forall)$ da (5)
8.	$Q(a)$	$(\forall)$ da (6)
9.	$\neg P(a) \vee \neg Q(a)$	$(\forall)$ da (2)
10.	$\neg P(a)\times$ $\quad$ $\neg Q(a)\times$	$(\vee)$ da (9)

□

Esempio 4.11. ♠ [$\Vdash \forall x \exists y P(x,y) \to \exists z R(z)$]

Dimostrazione.

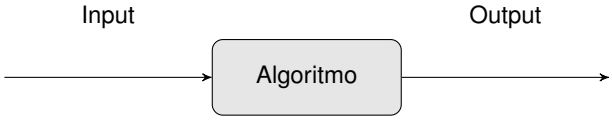
$$\nVdash \forall x \exists y P(x,y) \to \exists z R(z)$$

1.	$\forall x \exists y P(xy) \to \exists z R(z)$	Formula negata
2.	$\forall x \exists y P(xy)$	$(\to)$ da (1)
3.	$\neg \exists z R(z)$	$(\to)$ da (1)
4.	$\exists y P(ay)$	$(\forall)$ da (2)
5.	$P(ab)$	$(\exists)$ da (4)
6.	$\exists y P(by)$	$(\forall)$ da (2)
7.	$P(bc)$	$(\exists)$ da (6)
8.	$\exists y P(cy)$	$(\forall)$ da (2)
9.	$P(cd)$	$(\exists)$ da (8)
10.	$\exists y P(dy)$	$(\forall)$ da (2)
11.	$\vdots$	*loop*

□

L'*Esempio 4.11.* ci consente di evidenziare una differenza cruciale tra la logica dei predicati e quella proposizionale. La logica proposizionale è *decidibile*: esiste (almeno) un algoritmo **A** tale che, per ogni formula $\varphi \in Form_0$, **A** dimostra φ, se $\Vdash \varphi$; altrimenti, se $\nVdash \varphi$, **A** restituisce almeno una valutazione che la falsifica. In altre parole, ogni tautologia può essere accettata o refutata in modo puramente meccanico.

In generale, un algoritmo è un metodo per risolvere un problema, ottenendo un certo risultato partendo da un insieme di dati in ingresso. I dati in ingresso sono chiamati (valori in) *input*, mentre i risultati in uscita (valori in) *output*. Il comportamento di un algoritmo può essere schematizzato nel seguente modo



Ogni algoritmo è composto da un insieme di istruzioni e deve rispettare le seguenti proprietà

- l'insieme delle istruzioni deve essere finito;
- se una soluzione esiste, deve essere ottenibile attraverso un numero finito di passaggi;
- all'inizio del calcolo, e dopo ogni istruzione eseguita, deve essere sempre chiaro quale istruzione va eseguita al passo successivo. Non ci devono essere ambiguità o la necessità di affidarsi a intuizioni per procedere. Un procedimento con questa caratteristica è detto *deterministico*;
- deve essere sempre chiaro quando il processo è giunto al termine.

Poiché un algoritmo è un metodo deterministico, il risultato ottenuto è sempre lo stesso, una volta fissati i dati di partenza. Pertanto, i metodi delle tavole di verità, dei tableaux analitici e del calcolo dei sequenti, che abbiamo presentato per verificare la validità di una formula $\varphi \in \mathcal{L}_0$, sono tutti algoritmi. In questo caso, l'input è la formula $\varphi \in \mathcal{L}_0$ e l'output è una risposta del tipo "*sì/no*": *sì* se φ è una tautologia, *no* in caso contrario. Gli algoritmi che producono un output di questo tipo sono chiamati *algoritmi di decisione*.

In questo modo, un calcolo logico è *decidibile* se e solo se esiste un algoritmo che, data una formula φ, può sempre stabilire se φ sia valida o meno. Altrimenti, si dice *indecidibile*. Come visto, la logica proposizionale è decidibile; al contrario, nella logica del prim'ordine questa proprietà viene meno: non esiste alcun algoritmo che possa sempre decidere se una formula chiusa $\varphi \in \mathcal{L}_1$ sia valida o meno. Il *teorema di Church* dimostra infatti che tutti gli algoritmi di decisione, data una formula $\varphi \in \mathcal{L}_1$ non valida, in alcuni casi non producano alcun risultato, come accade esattamente con l'albero semantico nell'*Esempio 4.11*. Volendo essere ancora più precisi, la logica del prim'ordine è *semidecidibile*: esiste una procedura meccanica **A** tale che, per ogni formula $\varphi \in \mathcal{L}_1$, se φ è valida, **A** termina e restituisce una risposta affermativa; se non lo è, **A** potrebbe non terminare mai e, quindi, non fornire mai una risposta.

Come stabilito dal teorema di Church, l'insieme delle formule (in uno specifico linguaggio $\mathcal{L}$) valide in tutti i modelli che soddisfano un certo insieme di assiomi non è, in generale, effettivamente decidibile. L'insieme delle formule valide al prim'ordine, dunque, non è decidibile[8]. Il teorema di Church ha fornito una soluzione negativa al *problema della decisione* (*Entscheidungsproblem*), formulato da Hilbert e Ackermann nel 1928. Il problema chiedeva l'esistenza di un algoritmo che, data una teoria al prim'ordine, prendesse in input un enunciato e restituisse "*sì*" nel caso questo fosse universalmente valido (ovvero valido in tutti i modelli che soddisfano gli assiomi) e "*no*" altrimenti.

Avere un algoritmo per risolvere un problema (e dunque anche per decidere della validità delle formule di un calcolo logico) è vantaggioso perché gli algoritmi sono procedimenti puramente meccanici che possono essere eseguiti da un dispositivo *automatico* (ad esempio, un *calcolatore* specificatamente programmato). Tuttavia, alcuni algoritmi hanno un'utilità pratica limitata perché non sono *computazionalmente trattabili*: richiedono risorse di calcolo (tempo e/o spazio di memoria) che crescono esponenzialmente al crescere delle dimensione dell'input. Ad esempio, il metodo delle tavole di verità per la logica proposizionale rientra in questa categoria. I metodi dei tableaux analitici e dei sequenti migliorano sensibilmente la situazione, ma nei casi peggiori, anch'essi richiedono risorse esponenziali. Si congettura, che tutti gli algoritmi di decisione per la logica proposizionale siano *computazionalmente intrattabili*

[8] La prova originale si basa su un problema combinatorio noto per essere indecidibile e mostra come esso possa essere rappresentato nella logica del prim'ordine. Di conseguenza, se la logica del prim'ordine fosse decidibile, anche il problema menzionato lo sarebbe, il che costituisce una contraddizione.

rispetto ai casi peggiori.

Esempio 4.12. ♠ [$\Vdash \forall x(Q(x) \to \neg P(x)), \forall x(R(x) \to Q(x) \Vdash \forall x(R(x) \to \neg P(x))$]

Dimostrazione.

$$\forall x(Q(x) \to \neg P(x)), \forall x(R(x) \to Q(x) \nVdash \forall x(R(x) \to \neg P(x))$$

1.	$\forall x(Q(x) \to \neg P(x))$	Premessa
2.	$\forall x(R(x) \to Q(x)$	Premessa
3.	$\neg\forall x(R(x) \to \neg P(x))$	Conclusione negata
4.	$\neg(R(a) \to \neg P(a))$	$(\forall)$ da (3)
5.	$R(a)$	$(\neg \to)$ da (4)
6.	$\neg\neg P(a)$	$(\neg \to)$ da (4)
7.	$P(a)$	$(\neg\neg)$ da (6)
8.	$Q(a) \to \neg P(a)$	$(\forall)$ da (1)
9.	$\neg Q(a)$ $\quad$ $\neg P(a)\times$	$(\to)$ da (8)
10.	$R(a) \to Q(a)$	$(\forall)$ da (2)
11.	$\neg R(a)\times$ $\quad$ $Q(a)\times$	$(\to)$ da (10)

□

Esempio 4.13. ♠ [$\exists x Px \to \forall y R(ya) \Vdash \neg\exists x \neg R(xa)$]

Dimostrazione.

$$\exists x Px \to \forall y R(ya) \nVdash \neg\exists x \neg R(xa)$$

1.	$\exists x Px \to \forall y R(ya)$	Premessa
2.	$\neg\neg\exists x \neg R(xa)$	Conclusione negata
3.	$\exists x \neg R(xa)$	$(\neg\neg)$ da (2)
4.	$\neg R(ba)$	$(\neg\exists)$ da (3)
5.	$\neg\exists x P(x)$ $\quad$ $\forall y R(ya)$	$(\to)$ da (1)
6.	$\neg P(a)$ $\quad$ $R(aa)$	$(\neg\exists)$ da (5); $(\forall)$ da (5)
7.	$\neg P(b)\odot$ $\quad$ $R(ba)\times$	$(\neg\exists)$ da (5); $(\forall)$ da (5)

□

Esempio 4.14. [$\forall x(R(xa) \to R(ba)), \neg R(ba) \Vdash \forall x \neg R(xa)$]

Dimostrazione.

$$\forall x(R(xa) \to R(ba)), \neg R(ba) \nVdash \forall x \neg R(xa)$$

1.	$\forall x(R(xa) \to R(ba))$	Premessa
2.	$\neg R(ba)$	Premessa
3.	$\neg\forall x\neg R(xa)$	Conclusione negata
4.	$\neg\neg R(ca)$	$(\neg\forall)$ da (3)
5.	$R(ca)$	$(\neg\neg)$ da (4)
6.	$R(aa) \to R(ba)$	$(\forall)$ da (1)
7.	$R(ba) \to R(ba)$	$(\forall)$ da (1)
8.	$R(ca) \to R(ba)$	$(\forall)$ da (1)
9.	$\neg R(ca)\times$ $\quad$ $R(ba)\times$	$(\to)$ da (8)

□

Osservazione 4.2. La procedura di costruzione di un tableau per una formula del prim'ordine è, come per la logica proposizionale, *non deterministica*, ma anche potenzialmente *non terminante*.

4.5 Calcolo dei sequenti e tableaux analitici a blocchi

In questa sezione presenteremo una caratterizzazione sintattico-assiomatica della logica dei predicati classica, data dalla definizione della classe di regole del calcolo dei sequenti su cui si basa la relazione di derivabilità della logica del prim'ordine. Infine, mostreremo gli stretti legami che esistono tra il calcolo dei sequenti per la logica del prim'ordine e una variante dei tableaux analitici, detta *tableaux analitici a blocchi*.

Il sistema sintattico-assiomatico dei sequenti della logica dei predicati classica è costituito da un insieme di regole che permettono di caratterizzare la relazione intuitiva di inclusione logica tra proposizioni in $\mathcal{L}_1$.

Definizione 4.32. [Sistema assiomatico $\mathbb{L}_1$]

$$\mathbb{L}_1 = (\mathcal{L}_1, \vdash_{\mathrm{LK}})$$

in cui:

- $\mathcal{L}_1$ è il linguaggio della logica del prim'ordine;
- $\vdash_{\mathrm{LK}}$ sono le regole di derivazione del calcolo dei sequenti di Gentzen LK per la relazione di derivabilità su $\mathcal{L}_1$.

Se l'insieme di formule Γ è una logica del prim'ordine e $\mathbb{L}_1$ è una sua presentazione in un calcolo dei sequenti, allora

$$\alpha \in \Gamma \quad \text{sse} \quad \vdash_{\mathbb{L}_1} \Rightarrow \alpha$$

L'insieme delle regole di derivazione $\vdash_{\mathrm{LK}}$ contiene le regole di derivazione della logica proposizionale classica e un insieme di regole sui quantificatori. In particolare,

ogni quantificatore è caratterizzato da una coppia di regole che determinano come introdurre il segno all'interno di una sequenza. In linea con la presentazione notazionale di Galvan (2014, pp. 11-12), avremo per la logica predicativa le seguenti regole.

– *Regole del quantificatore universale*

$$\frac{\alpha(y), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x \alpha(x), \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \forall\text{s} \qquad !\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha(y)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x \alpha(x)}\ \forall\text{d}$$

– *Regole del quantificatore esistenziale*

$$!\frac{\alpha(y), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x \alpha(x), \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \exists\text{s} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha(y)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x \alpha(x)}\ \exists\text{d}$$

Le regole $\forall$d e $\exists$s qualificate dal punto esclamativo ! sono *regole critiche*. Questo significa che la variabile propria (*Eigenvariable*) y non deve comparire come variabile libera nei contesti Γ, Δ. In un linguaggio in cui non vi è distinzione grafica tra variabili vincolate e libere, ciò significa che

1. $\alpha(y) \equiv \alpha(x)[x/y]$
2. y non occorre in $\alpha(x)$, per cui $\mathrm{Leg}\alpha(x)[x/y]$ e $\alpha(x)[x/y][y/x] \equiv \alpha(x)$
3. y non è libera nè in Γ nè in Δ

Nelle regole $\forall$s e $\exists$d, invece, si ha $\alpha(y) \equiv \alpha(x)[x/y]$, sotto l'unica condizione che $\mathrm{Leg}\alpha(x)[x/y]$.

Riportiamo di seguito tutte le regole di LK.

Assiomi

$$\alpha \Rightarrow \alpha\ (\text{Ax})$$

Regole Strutturali

Indebolimento sinistro e destro

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \text{Ws} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha}\ \text{Wd}$$

Taglio

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \mu \quad \mu, \Theta \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Theta \Rightarrow \Delta, \Sigma}\ \text{Cut}$$

Regole operazionali

$\neg$ *sinistro e destro*

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha}{\neg\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \neg\text{s} \qquad \frac{\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\alpha}\ \neg\text{d}$$

$\wedge$ *sinistro e destro*

$$\frac{\alpha, \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\alpha \wedge \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \wedge\text{s} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \wedge \beta}\ \wedge\text{d}$$

$\vee$ *sinistro e destro*

$$\frac{\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\alpha \vee \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta} \vee\text{s} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha, \beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \vee \beta} \vee\text{d}$$

$\rightarrow$ *sinistro e destra*

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \quad \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\alpha \rightarrow \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta} \rightarrow\text{s} \qquad \frac{\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta, \beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \rightarrow \beta} \rightarrow\text{d}$$

$\forall$ *sinistro e destra*

$$\frac{\alpha(y), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x \alpha(x), \Gamma \Rightarrow \Delta} \forall\text{s} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha(y)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x \alpha(x)} \forall\text{d}$$

$\exists$ *sinistro e destra*

$$\frac{\alpha(y), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x \alpha(x), \Gamma \Rightarrow \Delta} \exists\text{s} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha(y)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x \alpha(x)} \exists\text{d}$$

Diamo alcuni esempi di derivazione in LK.

Esempio 4.15. [*Leggi di trasformazione dei quantificatori*]

Dimostrazione.

$$\text{a)} \quad \exists x \alpha(x) \Rightarrow \neg \forall x \neg \alpha(x)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha(x) \Rightarrow \alpha(x) \quad \text{(Ax)}}{\alpha(x), \neg\alpha(x) \Rightarrow} \neg\text{s}}{\forall x \neg\alpha(x), \alpha(x) \Rightarrow} \forall\text{s}}{\alpha(x) \Rightarrow \neg\forall x \neg\alpha(x)} \neg\text{d}}{\exists x \alpha(x) \Rightarrow \neg\forall x \neg\alpha(x)} \exists\text{s}$$

□

Dimostrazione.

$$\text{b)} \quad \neg \forall x \neg \alpha(x) \Rightarrow \exists x \alpha(x)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha(x) \Rightarrow \alpha(x) \quad \text{(Ax)}}{\alpha(x) \Rightarrow \exists\alpha(x)} \exists\text{d}}{\Rightarrow \exists x \alpha(x), \neg\alpha(x)} \neg\text{d}}{\Rightarrow \exists x \alpha(x), \forall x \neg\alpha(x)} \forall\text{d}}{\neg\forall x \neg\alpha(x) \Rightarrow \exists x \alpha(x)} \neg\text{s}$$

□

Dimostrazione.

$$c) \quad \neg\forall x\alpha(x) \Rightarrow \exists x\alpha(x)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\alpha(x) \Rightarrow \neg\alpha(x)\ \text{(Ax)}}{\neg\alpha(x) \Rightarrow \exists x\neg\alpha(x)}\ \exists\text{d}}{\Rightarrow \exists\alpha(x), \neg\neg\alpha(x)}\ \neg\text{d} \qquad \neg\neg\alpha(x) \Rightarrow \alpha(x)\ (\textit{LDNC})}{\Rightarrow \exists x\neg\alpha(x), \forall\alpha(x)}\ \text{Cut}}{\neg\forall x\alpha(x) \Rightarrow \exists x\neg\alpha(x)}\ \neg\text{s}$$

□

Dimostrazione.

$$d) \quad \neg\exists x\alpha(x) \Rightarrow \forall x\neg\alpha(x)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha(x) \Rightarrow \alpha(x)\ \text{(Ax)}}{\alpha(x) \Rightarrow \exists x\alpha(x)}\ \exists\text{d} \qquad \dfrac{\exists x\alpha(x) \Rightarrow \exists x\alpha(x)\ \text{(Ax)}}{\exists x\alpha(x), \neg\exists x\alpha(x) \Rightarrow}\ \neg\text{s}}{\alpha(x), \neg\exists x\alpha(x) \Rightarrow}\ \text{Cut}}{\neg\exists x\alpha(x) \Rightarrow \neg\alpha(x)}\ \neg\text{d}}{\neg\exists\alpha(x) \Rightarrow \forall x\neg\alpha(x)}\ \forall\text{d}$$

□

Concludiamo il capitolo illustrando gli stretti legami tra il calcolo dei sequenti e una variante del metodo tableaux detta *a blocchi*. Come sappiamo, la correttezza del sequente

$$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \Rightarrow \{\psi_1, \ldots, \psi_m\}$$

equivale alla validità della fbf

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i \rightarrow \bigvee_{j=1}^{m} \psi_j$$

Dalla *Definizione 4.7.* sappiamo che un sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è valido se non è refutabile, ovvero se non esiste una valutazione della sua formula associata tale che

$$v(\bigwedge_{\varphi\in\Gamma} \varphi \ \rightarrow \ \bigvee_{\psi\in\Delta} \psi) = 0$$

Pertanto $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è valido se per ogni valutazione v

$$v(\bigwedge \Gamma) \leq v(\bigvee \Delta)$$

che a sua volta equivale al *chiudersi* dell'albero che ha come radice

$$\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \rightarrow \psi_1 \vee \psi_2 \vee \ldots \vee \psi_m)$$

In base alla regola $(\neg \rightarrow)$ di costruzione dei tableaux analitici, i primi nodi dell'albero risulteranno

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \neg\psi_1, \ldots, \neg\psi_m$$

Associamo a ogni sequente $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \Rightarrow \{\psi_1, \ldots, \psi_m\}$ l'insieme di fbf

$$\Pi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \neg\psi_1, \ldots, \neg\psi_m\}$$

Il sequente Π è corretto se e solo se le fbf in Π non possono essere soddisfatte $(\neg Sod\Pi)$, ossia se e solo se si chiude l'albero di cui sopra. Inoltre

- $\Rightarrow \psi_1, \ldots, \psi_n$ ha il significato di $\Pi = \{\neg\psi_1, \ldots, \neg\psi_n\}$;
- $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \Rightarrow$ ha il significato di $\Pi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$.

Presentiamo ora il metodo del *tableaux analitici a blocchi*, una variante dei tableaux analitici che si differenzia da quelli proposti precedentemente solo per il fatto che in ogni nodo, anziché un'unica fbf, figura un insieme di fbf del tipo Π. Dato il legame con il calcolo dei sequenti, presenteremo le regole dei tableaux analitici a blocchi nella *variante notazionale a sequenti*.

Regole dei tableaux analitici a blocchi per $\mathbb{L}_1$ (notazione a sequenti)

– *Regole di tipo* α (congiuntive)

$$\frac{\Pi, \neg\neg\varphi}{\Pi, \varphi}\ \neg\neg \qquad \frac{\Pi, \varphi \wedge \psi}{\Pi, \varphi, \psi}\ \wedge \qquad \frac{\Pi, \neg(\varphi \vee \psi)}{\Pi, \neg\varphi, \neg\psi}\ \neg\vee \qquad \frac{\Pi, \neg(\varphi \rightarrow \psi)}{\Pi, \varphi, \neg\psi}\ \neg\rightarrow$$

– *Regole di tipo* β (disgiuntive)

$$\frac{\Pi, \neg(\varphi \wedge \psi)}{\Pi, \neg\varphi \mid \neg\psi}\ \neg\wedge \qquad \frac{\Pi, \varphi \vee \psi}{\Pi, \varphi \mid \psi}\ \vee \qquad \frac{\Pi, \varphi \rightarrow \psi}{\Pi, \neg\varphi \mid \psi}\ \rightarrow$$

– *Regole di tipo* γ (universali)

$$\frac{\Pi, \forall \mathrm{x}\varphi(\mathrm{x})}{\Pi, \forall \mathrm{x}\varphi(\mathrm{x}), \varphi[\mathrm{x}/\mathrm{a}_{\downarrow}]}\ \forall \qquad \frac{\Pi, \neg\exists \mathrm{x}\varphi(\mathrm{x})}{\Pi, \neg\exists \mathrm{x}\varphi(\mathrm{x}), \neg\varphi[\mathrm{x}/\mathrm{a}_{\downarrow}]}\ \neg\exists$$

– *Regole di tipo* δ (esistenziali)

$$\frac{\Pi, \neg\forall \mathrm{x}\varphi(\mathrm{x})}{\Pi, \neg\varphi[\mathrm{x}/\mathrm{a}_{\uparrow}]}\ \neg\forall \qquad \frac{\Pi, \exists \mathrm{x}\varphi(\mathrm{x})}{\Pi, \varphi[\mathrm{x}/\mathrm{a}_{\uparrow}]}\ \exists$$

L'unica differenza rispetto ai tableaux analitici "standard" è nelle regole di tipo γ, dove la formula esaminata viene ripetuta nel *blocco conseguenza*. Questo, se da un lato appesantisce la notazione, dall'altro, consente di non dover ritornare su blocchi nei quali si è già esaminata una formula. In generale, quando si sviluppa un tableau a blocchi si parte sempre da una radice contenente la *formula negata* (*fn*) $\neg\Pi$, che corrisponde al sequente di cui si vuole provare la correttezza, e si procede applicando le rispettive regole a ogni nodo. Quando un blocco è terminato lo si racchiude tra parentesi graffe e con esso si chiude il ramo che lo contiene, aggiungendo il simbolo $\times$ se il blocco contiene una coppia di fbf del tipo φ e $\neg\varphi$ ed è quindi chiuso; altrimenti, si aggiunge il simbolo $\odot$ se il blocco rimane aperto. A ogni livello si esaminano solo i blocchi foglia dei rami rimasti aperti. Consideriamo alcuni esempi.

Esempio 4.16. [*Principio di non contraddizione*]

Dimostrazione.

$$\Rightarrow \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$$

$$\dfrac{\dfrac{\neg\neg(\varphi \wedge \neg\varphi) \quad (fn)}{\varphi \wedge \neg\varphi}\,\neg\neg}{\{\varphi, \neg\varphi\}\times}\,\wedge$$

□

Esempio 4.17. [*Principio del terzo escluso*]

Dimostrazione.

$$\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi$$

$$\dfrac{\dfrac{\neg(\varphi \vee \neg\varphi) \quad (fn)}{\neg\varphi, \neg\neg\varphi}\,\neg\vee}{\{\neg\varphi, \varphi\}\times}\,\neg\neg$$

□

Esempio 4.18. ♠ [*Prima legge di De Morgan*]

Dimostrazione.

$$\Rightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi \rightarrow \neg(\varphi \vee \psi)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi \rightarrow \neg(\varphi \vee \psi)) \quad (fn)}{\neg\varphi \wedge \neg\psi, \neg\neg(\varphi \vee \psi)}\,\neg\rightarrow}{\neg\varphi \wedge \neg\psi, \varphi \vee \psi}\,\neg\neg}{\neg\varphi, \neg\psi, \varphi \vee \psi}\,\wedge}{\{\neg\varphi, \neg\psi, \varphi\}\times \qquad \{\neg\varphi, \neg\psi, \psi\}\times}\,\vee$$

□

Esempio 4.19. [$\Rightarrow ((\varphi \to \psi) \to \psi) \to \psi)$]

Dimostrazione.

$$\Rightarrow ((\varphi \to \psi) \to \psi) \to \psi)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg((\varphi \to \psi) \to \psi) \to \psi) \quad (\mathit{fn})}{(\varphi \to \psi) \to \psi), \neg\psi)}\,\neg\to}{\neg(\varphi \to \psi), \neg\psi \qquad \{\psi, \neg\psi\}\times}\,\to}{\{\varphi, \neg\psi, \neg\psi\}\odot}\,\neg\to$$

□

Esempio 4.20. [$\varphi \vee \psi \Rightarrow \neg\varphi \to \psi$]

Dimostrazione.

$$\varphi \vee \psi \Rightarrow \neg\varphi \to \psi$$

$$\dfrac{\dfrac{\varphi \vee \psi, \neg(\neg\varphi \to \psi)}{\varphi \vee \psi, \neg\varphi, \neg\psi}\,\neg\to}{\{\varphi, \neg\varphi, \neg\psi\}\times \qquad \{\psi, \neg\varphi, \neg\psi\}\times}\,\vee$$

□

Esempio 4.21. ♠ [*Leggi di trasformazione dei quantificatori*]

Dimostrazione.

$$\text{a)} \quad \exists x\varphi(x) \Rightarrow \neg\forall x\neg\varphi(x)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\exists x\varphi(x), \neg\neg\forall x\neg\varphi(x)}{\exists x\varphi(x), \forall x\neg\varphi(x)}\,\neg\neg}{\varphi(a), \forall x\neg\varphi(x)}\,\exists}{\{\varphi(a), \forall x\neg\varphi(x), \neg\varphi(a)\}\times}\,\forall$$

□

Dimostrazione.

$$d) \quad \neg\exists x\varphi(x) \Rightarrow \forall x\neg\varphi(x)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\exists x\varphi(x), \neg\forall x\neg\varphi(x)}{\neg\exists x\varphi(x), \neg\neg\varphi(a)}\,\neg\forall}{\neg\exists x\varphi(x), \varphi(a)}\,\neg\neg}{\{\neg\exists x\varphi(x), \neg\varphi(a), \varphi(a)\}\times}\,\neg\exists$$

□

Sebbene il metodo dei tableaux analitici a blocchi sia più macchinoso di quello non a blocchi, esso è comunque logicamente equivalente, e si può tradurre, come vedremo, direttamente nel calcolo dei sequenti. Prendiamo in esame l'albero dell'*Esempio 4.20.* e sostituiamo ogni blocco con il sequente corrispondente, si ottiene

Dimostrazione.

$$\varphi \vee \psi \Rightarrow \neg\varphi \to \psi$$

$$\dfrac{\dfrac{\varphi \vee \psi \Rightarrow \neg\varphi \to \psi}{\varphi \vee \psi \Rightarrow \varphi, \psi}\,\neg\to}{\{\varphi \Rightarrow \varphi, \psi\}\times \qquad \{\psi \Rightarrow \varphi, \psi\}\times}\,\vee$$

□

Se ora capovolgiamo l'albero otteniamo, a parte qualche differenza del tutto inessenziale, la derivazione nel calcolo dei sequenti LK

Dimostrazione.

$$\varphi \vee \psi \Rightarrow \neg\varphi \to \psi$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi, \psi \quad (\mathrm{Ax})^{\mathrm{Wd}}}{\neg\varphi, \varphi \Rightarrow \psi}\,\neg\mathrm{s} \qquad \dfrac{\psi \Rightarrow \psi, \varphi \quad (\mathrm{Ax})^{\mathrm{Wd}}}{\neg\varphi, \psi \Rightarrow \psi}\,\neg\mathrm{s}}{\neg\varphi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \psi}\,\vee\mathrm{s}}{\varphi \vee \psi \Rightarrow \neg\varphi \to \psi}\,\to\mathrm{d}$$

□

Questa circostanza non è casuale, poiché le regole di costruzione dell'albero a blocchi corrispondono, a parte qualche aspetto inessenziale, alle regole del calcolo dei sequenti. I due calcoli sono per questo motivo *isomorfi*. Senza addentrarci in ulteriori dettagli tecnici e formali, l'isomorfismo indica, in generale, una perfetta corrispondenza strutturale e logica, e si indica con il simbolo $\cong$. In tale contesto, ogni elemento di un sistema ha un esatto equivalente nell'altro e le relazioni tra gli elementi sono preservate. Come scrive Douglas Hofstadter:

> Si parla di isomorfismo quando due strutture complesse si possono applicare l'una sull'altra, cioè far corrispondere l'una all'altra, in modo tale che per ogni parte di una delle strutture ci sia una parte corrispondente nell'altra struttura; in questo contesto diciamo che due parti sono corrispondenti se hanno un *ruolo simile* nelle rispettive strutture. (Hofstadter 1990, p. 54, *corsivo nostro*)

Ad esempio, a un sequente assioma corrisponde un blocco chiuso

$$\alpha \Rightarrow \alpha \text{ (Ax)} \quad \cong \quad \{\alpha, \neg\alpha\}$$

mentre, se consideriamo le regole di introduzione della congiunzione ($\wedge$s) e della disgiunzione ($\vee$s) negli antecedenti nel calcolo LK, invertendo premessa e conclusione si hanno le relative regole di costruzione dei tableaux analitici a blocchi

$$\frac{\alpha, \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\alpha \wedge \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta} \wedge\text{s} \qquad \cong \qquad \frac{\Pi, \varphi \wedge \psi}{\Pi, \varphi, \psi} \wedge$$

$$\frac{\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\alpha \vee \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta} \vee\text{s} \qquad \cong \qquad \frac{\Pi, \varphi \vee \psi}{\Pi, \varphi | \psi} \vee$$

Lo stesso vale per le altre regole[9], a riprova del *ruolo simile* svolto nei rispettivi calcoli, il che dimostra l'isomorfismo tra il metodo dei tableaux analitici a blocchi e il calcolo dei sequenti di Gentzen.

Questa perfetta corrispondenza strutturale manifesta in concreto la natura stessa della logica, definita nella *prefazione* come "scienza dell'ordine" per eccellenza, capace di rivelare un'armonia profonda e coerente negli schemi inferenziali del ragionamento naturale e matematico.

[9] Con qualche variante inessenziale, come si è detto, soprattutto per le regole relative ai quantificatori.

ESERCIZI CAP. 4.

Esercizio 4.1. Si assumano i seguenti predicati e costanti e si formalizzino le seguenti proposizioni nel linguaggio della logica dei predicati.

- $F(x)$: x è un filosofo
- $L(x)$: x è un libro
- $R(x, y)$: x rispetta y
- $A(x, y)$: x ama y
- c: Cicerone
- a: Aristotele

1. "Tutti amano Cicerone"
2. "Cicerone non ama nessuno"
3. "Qualche filosofo ama un libro"
4. "Tutti i filosofi amano tutti i libri"
5. "Nessun filosofo rispetta tutti i libri"
6. "C'è un libro che tutti amano"
7. "Solo i filosofi amano i libri"
8. "Qualcuno rispetta se stesso"
9. "Se Cicerone rispetta Aristotele, allora tutti lo rispettano"
10. "Non è vero che tutti i filosofi amano Aristotele"

Esercizio 4.2. Verificare se le seguenti formule sono logicamente valide (tautologie) utilizzando il metodo dei tableaux analitici.

1. $\Vdash \forall x(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x))$
2. $\Vdash \exists x(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\exists x P(x) \vee \exists x Q(x))$
3. $\Vdash \neg\forall x P(x) \leftrightarrow \exists x \neg P(x)$
4. $\Vdash \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x))$
5. $\Vdash \forall x P(x) \rightarrow P(a)$
6. $\Vdash \neg\exists x(P(x) \wedge \neg P(x))$
7. $\Vdash \exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x)$
8. $\Vdash \forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y \forall x P(x, y)$
9. $\Vdash (\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)) \rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$
10. $\Vdash \forall x(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \vee \forall x Q(x))$

Esercizio 4.3. ♠ Verificare se le seguenti formule sono logicamente valide (tautologie) utilizzando il metodo dei tableaux analitici.

1. $\Vdash \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$
2. $\Vdash \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \neg\exists x Q(x) \rightarrow \neg\exists x P(x)$
3. $\Vdash \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$
4. $\Vdash (\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)) \rightarrow \exists x \neg Q(x) \rightarrow \exists x \neg P(x)$

5. $\Vdash \forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \to \forall x(P(x) \vee Q(x))$
6. $\Vdash \exists x(P(x) \to Q(x)) \leftrightarrow (\forall x P(x) \to \exists x Q(x))$
7. $\Vdash \forall x(P(x) \vee Q(x)) \to \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$
8. $\Vdash \exists y \forall x P(x, y) \to \forall x \exists y P(x, y)$
9. $\Vdash \exists x \exists y P(x, y) \to \forall x P(x, x)$
10. $\Vdash (\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)) \to \exists x(P(x) \wedge Q(x))$

Esercizio 4.4. ♠ Verifica che le seguenti formule siano *loop*.

1. $\Vdash \forall x \exists y R(x, y) \to \exists z R(z, z)$
2. $\Vdash \exists x P(x) \wedge \forall x(P(x) \to P(f(x))) \to \neg P(f(f(x)))$
3. $\Vdash \forall x \exists y R(x, y) \wedge \forall z \neg R(z, f(z))$
4. $\Vdash \forall x \exists y P(x, y) \wedge \forall z \exists w Q(z, w)$
5. $\Vdash \exists x \forall y P(x, y) \to \forall y \exists x P(x, y)$

Esercizio 4.5. Deriva le seguenti formule usando il calcolo dei sequenti.

1. $\Rightarrow \forall x P(x) \to P(a)$
2. $\Rightarrow P(a) \to \exists x P(x)$
3. $\Rightarrow \neg \exists x P(x) \to \forall x \neg P(x)$
4. $\Rightarrow \forall x(P(x) \wedge Q(x)) \to \forall x P(x)$
5. $\Rightarrow \exists x \forall y P(x, y) \to \forall y \exists x P(x, y)$
6. $\Rightarrow \forall x(P(x) \to Q) \to (\exists x P(x) \to Q)$
7. $\Rightarrow \forall x(P(x) \to Q(x)) \wedge \exists x P(x) \to \exists x Q(x)$
8. ♠ $\Rightarrow \neg \forall x(P(x) \to Q) \to \exists x P(x) \wedge \neg Q$
9. ♠ $\Rightarrow \exists y \forall x(P(x) \to Q(y)) \to (\forall x P(x) \to \exists y Q(y))$
10. ♠ $\Rightarrow \forall x(P(x) \vee Q(x)) \to (\exists x P(x) \vee \forall x Q(x))$

Esercizio 4.6 Deriva le seguenti formule usando il metodo dei tableuax analitici blocchi.

1. $\Rightarrow (\varphi \to \psi) \to (\neg \psi \to \neg \varphi)$
2. $\Rightarrow \varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi)$
3. $\Rightarrow \varphi \vee \neg \varphi$
4. $\Rightarrow \varphi \wedge \psi \to \varphi$
5. $\Rightarrow ((\varphi \to \psi) \to \psi) \to \psi$
6. $\Rightarrow \neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg \varphi \wedge \neg \psi)$
7. $\Rightarrow ((\varphi \to \psi) \to \chi) \to (\neg \varphi \vee \psi \to \chi)$
8. $\Rightarrow (\varphi \wedge (\psi \vee \chi)) \to ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi))$
9. $\Rightarrow \neg \neg \varphi \to \varphi$
10. $\Rightarrow ((\varphi \vee \psi) \wedge \neg \varphi) \to \psi$
11. $\Rightarrow \forall x P(x) \to P(a)$
12. $\Rightarrow \neg \exists x P(x) \leftrightarrow \forall x \neg P(x)$

13. $\Rightarrow \forall x(P(x) \wedge Q(x)) \leftrightarrow (\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x))$
14. $\Rightarrow \exists x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall y \exists x P(x, y)$
15. $\Rightarrow \forall x(P(x) \rightarrow Q) \leftrightarrow (\exists x P(x) \rightarrow Q)$
16. $\spadesuit \Rightarrow (\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)) \rightarrow \forall x(P(x) \vee Q(x))$
17. $\spadesuit \Rightarrow \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$
18. $\spadesuit \Rightarrow \exists x \forall y(P(x, y) \rightarrow Q(x, y)) \rightarrow \forall x \exists y(P(x, y) \rightarrow Q(x, y))$
19. $\spadesuit \Rightarrow \neg \forall x(P(x) \vee Q(x)) \vee \forall x(P(x) \vee Q(x))$
20. $\spadesuit \Rightarrow \forall x \forall y(P(x) \vee Q(y)) \leftrightarrow (\forall x P(x) \vee \forall x Q(x))$

SOLUZIONE ESERCIZI CAP. 4.

Soluzione Esercizio 4.1.

1. "Tutti amano Cicerone" $\equiv \forall x A(x, c)$;
2. "Cicerone non ama nessuno" $\equiv \neg\exists x A(c, x)$ (oppure $\forall x \neg A(c, x)$);
3. "Qualche filosofo ama un libro" $\equiv \exists x \exists y (F(x) \wedge L(y) \wedge A(x, y))$;
4. "Tutti i filosofi amano tutti i libri" $\equiv \forall x \forall y ((F(x) \wedge L(y)) \rightarrow A(x, y))$ (oppure $\forall x (F(x) \rightarrow \forall y (L(y) \rightarrow A(x, y)))$);
5. "Nessun filosofo rispetta tutti i libri" $\equiv \neg\exists x (F(x) \wedge \forall y (L(y) \rightarrow R(x, y)))$;
6. "C'è un libro che tutti amano" $\equiv \exists y (L(y) \wedge \forall x A(x, y))$;
7. "Solo i filosofi amano i libri" $\equiv \forall x (\exists y (L(y) \wedge A(x, y)) \rightarrow F(x))$;
8. "Qualcuno rispetta se stesso" $\equiv \exists x R(x, x)$;
9. "Se Cicerone rispetta Aristotele, allora tutti lo rispettano" $\equiv R(c, a) \rightarrow \forall x R(x, a)$;
10. "Non è vero che tutti i filosofi amano Aristotele" $\equiv \neg\forall x (F(x) \rightarrow A(x, a))$ (oppure $\exists x (F(x) \wedge \neg A(x, a))$);

Soluzione Esercizio 4.2.

1. $\Vdash$
2. $\Vdash$
3. $\Vdash$
4. $\Vdash$
5. $\Vdash$
6. $\Vdash$
7. $\nVdash$
8. $\nVdash$
9. $\nVdash$
10. $\nVdash$

Soluzione Esercizio 4.3.

1. $\Vdash$
2. $\Vdash$
3. $\Vdash$
4. $\Vdash$
5. $\Vdash$
6. $\Vdash$
7. $\nVdash$
8. $\nVdash$
9. $\nVdash$
10. $\nVdash$

Riferimenti bibliografici

[1] Abrusci, V. M., De Falco, M., 2014, *Logica. Vol. 1: Dimostrazioni e modelli al primo ordine*, Springer, Milano.

[2] Abrusci, V. M., De Falco, M., 2018, *Logica. Vol. 2: Incompletezza, teoria assiomatica degli insiemi*, Springer, Milano.

[3] Agazzi, E., 1964, *La logica simbolica*, La Scuola, Brescia.

[4] Agazzi, E., Palladino, D., 1992, *Le geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria*, Mondadori, Milano.

[5] Agazzi, E., 2024, *La scienza e l'anima dell'Occidente*, Mimesis, Milano.

[6] Aristotele, 1996, *Organon*, a cura di Zanatta, M., UTET, Torino.

[7] Beneduci, R., Dalla Chiara, M.L., Giuntini, R., Sergioli, G., 2025, "Sharp and Unsharp Quantum Incompatibilities. A Comparison and Some Foundational Questions", *Foundations of Science*, 1-25.

[8] Berti, E., 1992, *Aristotele nel Novecento*, Laterza, Bari.

[9] Berto, F., 2008, *Tutti pazzi per Gödel! La guida completa al Teorema di Incompletezza*, Laterza, Roma-Bari.

[10] Bertsch, M., 1994, *Istituzioni di matematica*, Bollati Boringhieri, Torino.

[11] Beth, E.W., 1955, "Semantic Entailment and Formal Derivability", *Mededelingen der Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen*, 18, 13, 309-342.

[12] Beth, E.W., 1963, *I fondamenti della logica matematica*, a cura di Casari, E., Feltrinelli, Milano.

[13] Bigatti, A.M., Robbiano, L., 2021, *Matematica di base*, Zanichelli, Milano.

[14] Boole, G., 1854 (2009), *An Investigation of the Laws of Thought On Which Are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*, Cambridge University Press, Cambridge.

[15] Borga, M., Palladino, D., 1997, *Oltre il mito della crisi: fondamenti e filosofia della matematica nel XX secolo*, La Scuola, Brescia.

[16] Bottazzini, U., 2017, *Il flauto di Hilbert. Storia della matematica*, UTET, Torino.

[17] Bruni, R., 2015, *Gödel, un profilo*, Carocci, Roma.

[18] Buss, S.R., 1998, *Handbook of proof theory*, North Holland.
[19] Calemi, F.F., 2024, *Argomentare, dimostrare, confutare. Un'introduzione alla logica. Nuova edizione*, Carocci, Roma.
[20] Cantini, A., Minari, P., 2009, *Introduzione alla logica. Linguaggio, significato, argomentazione*, Le Monnier Università, Firenze.
[21] Casalegno, P., Mariani, M., 2004, *Teoria degli insiemi. Un'introduzione*, Carocci, Roma.
[22] Casari, E., 1960, *Lineamenti di logica matematica*, Feltrinelli, Milano.
[23] Casari, E., 1973, *La filosofia della matematica del '900*, La Nuova Italia, Firenze.
[24] Casari, E., 1997, *Introduzione alla logica*, UTET, Torino.
[25] Cellucci, C., 1978, *Teoria della dimostrazione*, Boringhieri, Torino.
[26] Cuconato, S., 2024, "Modal Logic, Probability and Machine Learning Systems for Metadata Extraction", *Ratio Mathematica*, 53, 7-24.
[27] Cuconato, S., 2024, "Can Nonexistent Mathematical Objects Make a Difference? Meinongianism, Indispensability Argument and Mathematical Entanglement", *Philosophical Inquiries*, 12(1), 61-77.
[28] Cuconato, S., 2024, "FOL-based applied ontology for metadata extraction in mathematical knowledge management, *Romanian Journal of Mathematics and Computer Science*, 14(1), 1-11.
[29] Cuconato, S., 2025, "A Logical Language for Reasoning about Democratic Decision–Making", Proceedings of 1th International Conference on Advanced Network Technologies and Computational Intelligence (ICANTCI 2024). In: Singh, J., Goyal, S.B., Kumar, M., Mittall, R. (eds.), *Advanced Network Technologies and Computational Intelligence*. ICANTCI 2024. Communications in Computer and Information Science, vol 2382, Springer, Cham, 293-302.
[30] Cuconato, S., 2025, "Data Mining Meets Logic: Situation-Based Modal Logic and Metadata Veracity", *Science & Philosophy*, 13(1), 1-13.
[31] Cuconato, S., 2025, "Jaśkowski–Fitch Natural Deduction Proofs for Metadata Extraction through Machine Learning Systems", Proceedings of 6th International Conference on Computation Intelligence in Pattern Recognition (CIPR 2024). In: Das, A.K., Nayak, J., Naik, B., Vimal, S., Pelusi, D. (eds.), *Computational Intelligence in Pattern Recognition*. Lecture Notes in Networks and Systems, vol 1153, Springer, Singapore, 609-625.
[32] D'Agostino, M., Hosni, H., 2024, *Le vie della logica*, Einaudi, Torino.
[33] d'Atri, A., 2016, *La questione della sostanza nella filosofia contemporanea*, Edizioni Unicopli, Milano.
[34] De Morgan, A., *Formal logic*, Cambridge University Press.
[35] Fazio, A., Ledda, A., Pra Baldi, M., 2014, *Percorsi di logica*, Mimesis, Milano.
[36] Franchella, M.A., 2012, *Sui sentieri della logica*, Aracne, Roma.
[37] Frege, G., 1879, *Begriffsschrift: Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Verlag von Louis Nebert, Halle. Traduzione italia-

na: *Ideografia*, in Logica e Aritmetica, a cura di Mangione, C., 1977, Boringhieri, Torino, 103-206.

[38] Frege, G., 1892, "Über Sinn und Bedeutung", *Zeitschrift für Philosophie und Philosophische Kritik*, 100, 25-50. Traduzione italiana: *Senso, funzione e concetto*, a cura di Penco C., e Picardi E., edizione 2001, Laterza, Roma-Bari.

[39] Frixione, M., Palladino, D., 2004, *Funzioni, macchine, algoritmi. Introduzione alla teoria della computabilità*, Carocci, Roma.

[40] Galvan, S., 2012, *Logica*, La Scuola, Brescia.

[41] Galvan, S., 2015, *L'Hauptsatz di Gentzen*, EDUCatt, Milano.

[42] Galvan, S., 2021, *Introduzione ai sistemi dell'aritmetica. Da Q a PA*, EDUCatt, Milano.

[43] Gentzen, G, 1934-1935, "Untersuchungen über das logische Schliessen", Mathematische Zeitschrift, 39 (1), 176-210, 405-431.

[44] Gentzen, G., 1936, "Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie", Mathematische Annalen, 112 (1), 493-565.

[45] Gentzen, G., 1969, *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*. A cura di Szabo M. E., North-Holland Publishing Company.

[46] Giordani, A., 2011, *Lezioni di filosofia della scienza*, EDUCatt, Milano.

[47] Giordani, A., 2016, *Introduzione alla logica*, EDUCatt, Milano.

[48] Giunti, M., Ledda, A., Sergioli, G., 2016, *I modelli nelle teorie scientifiche*, Carocci, Roma.

[49] Gödel, K., 1930, "Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls", *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 37, 349-360.

[50] Gödel, K., 1933, "Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls", *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 4, 39-40.

[51] Hilbert, D., 1899, *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Leipzig,

[52] Hilbert, D., 1978, *Ricerche sui fondamenti della matematica*, a cura di: Abrusci, M.V., Bibliopolis, Napoli.

[53] Hilbert, D., Ackermann, W., 1928, *Grundzüge der theoretischen logik*, Springer, Berlin.

[54] Hodges, W., 1993, *Model Theory*, Cambridge University Press, Cambridge.

[55] Hofstadter, D.R., 1990, Gödel, Escher, Bach: un'eterna ghirlanda brillante. Una fuga metaforica su menti e macchine nello spirito di Lewis Carroll, Adelphi, Milano.

[56] Iacona, A., 2021, *LOGIC: Lecture Notes for Philosophy, Mathematics, and Computer Science*, Springer, Berlino.

[57] Kant, I., 1781/1787, *Kritik der reinen Vernunft*, traduzione italiana: *Critica della ragion pura*, a cura di Gentile, G., Lombardo Radice, G., Laterza, Roma-Bari.

[58] Kleene, S.C., 2003, *Mathematical Logic*, Mineola, Dover Publications, New York.

[59] Lakatos, I., 1962 (1978), *Mathematics, Science and Epistemology: Volume 2, Philosophical Papers*, (J. Worrall & G. Currie, Eds.), Cambridge University Press, Cambridge.
[60] Lolli, G., 1978, *Logica matematica*, Bollati Boringhieri, Torino.
[61] Lolli, G., 2005, *QED. Fenomenologia della dimostrazione*, Bollati Boringhieri, Torino.
[62] Lolli, G., 2008, *Guida alla teoria degli insiemi*, Springer, Milano.
[63] Lolli, G., 2011, *La guerra dei trent'anni: Da Hilbert a Gödel*, Edizioni ETS, Pisa.
[64] Mancosu, P., Galvan, S., Zach, R., 2021, *An Introduction to Proof Theory Normalization, Cut-Elimination, and Consistency Proofs*, Oxford University Press, Oxford.
[65] Mangione, C., Bozzi, S., 1993, *Storia della logica. Dalle Boole ai giorni nostri giorni*, Garzanti, Milano.
[66] Marcja, A., Toffalori, C., 1998, *Introduzione alla teoria dei modelli*, Zanichelli, Bologna.
[67] Marker, D., 2002, *Model Theory: An Introduction*, Springer, New York.
[68] Mendelson, E., 1964, *Introduction to Mathematical Logic*, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, New Jersey.
[69] Negri, S., von Plato, J., 2011, *Structural Proof Theory*, Cambridge University Press, Cambridge.
[70] Negri, S., von Plato, J., 2021, *Proof Analysis: A Contribution to Hilbert's Last Problem*, Cambridge University Press, Cambridge.
[71] Negri, S., 2015, "Le direzioni della ricerca logica in Italia: Teoria strutturale della dimostrazione". In Hosni, H., Lolli, G., Toffalori, C., (a cura di), *Le direzioni della ricerca logica in Italia*, Edizioni della Normale, Pisa, 221-253.
[72] Palladino, D., 2002, *Corso di logica. Introduzione elementare al calcolo dei predicati*, a cura di Frixione, M., Carocci, Roma.
[73] Palladino, D., 2004, *Logica e teorie formalizzate. Completezza, incompletezza, indecidibilità*, Carocci, Roma.
[74] Panza, M., Sereni, A., 2010, *Il problema di Platone. Un'introduzione storica alla filosofia della matematica*, Carocci, Roma.
[75] Pasch, M., 1882, *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Teubner, Leipzig, 1882.
[76] Platone, 2018, *Teeteto*, a cura di Trabattoni F., Einaudi, Torino.
[77] Poggiolesi, F., 2011, *Gentzen Calculi for Modal Logic*, Springer, Berlin, Heidelberg.
[78] Prawitz, D., 1965, *Natural Deduction: A Proof-Theoretical Study*, Almqvist & Wiksell, Stoccolma.
[79] Prawtiz, D., 1971, "Ideas and Results in Proof Theory", *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, 63, 235-307.

[80] Riemann, B., 1868, *Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria e altri scritti scientifici e filosofici*. A cura di Pettoello R., Bollati Boringhieri, Torino, 1994.

[81] Robinson, A., 1978, "Logica Matematica", *Enciclopedia del Novecento*, Istituto della Enciclopedia Italiana.

[82] Russell, B., Whitehead, A. N., 1910-1913, *Principia Mathematica*, Cambridge University Press, Cambridge.

[83] Smullyan, R. M., 1968, *First-Order Logic*, Springer, New York.

[84] Tarski, A., 1965, Introduction to logic and the methodology pf deductive science, Oxford University Press, oxford. Traduzione italiana: *Introduzione alla logica e alla metodologia delle scienze deduttive*, a cura di Ballo, E., Bozzi, S., 1969, Bompiani, Milano.

[85] Troelstra, A. S., Schwichtenberg, H., 2000, *Basic Proof Theory*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge.

[86] Turbanti, G., 2020, *Logica e mondi possibili*, Pisa University Press, Pisa.

[87] van Dalen, D., 2013, *Logic and Structure*, Springer, London.

[88] Varzi, A., Nolt, J., Rohatyn, D., 2007, *Logica*, McGraw-Hill Education.

[89] von Plato, J., 2013, *Elements of Logical Reasoning*, Cambridge University Press, Cambridge

[90] Wittgenstein, L., 1922, *Tractatus Logico-Philosophicus*, Routledge & Kegan Paul, London. Traduzione italiana: a cura di Conte, A.G., 2009, Einaudi, Torino.

Lo scopo di *Metodi Logici 1* è fornire al lettore un'introduzione rigorosa ed esauriente ai concetti fondamentali della logica del primo ordine. Il volume presta particolare attenzione: *i*) ai metodi matematici dei sistemi di logica e alla dimostrazione analitica dei teoremi; *ii*) alla presentazione di numerosi esempi ed esercizi sul metodo dei tableaux analitici (standard e a blocchi nella notazione a sequenti) e sul calcolo dei sequenti; e *iii*) al contesto storico-epistemologico in cui è nata e si è sviluppata la logica matematica. Gli argomenti trattati sono stati scelti per la loro rilevanza a livello nazionale e internazionale, spaziando dalla teoria degli insiemi alle nozioni sintattiche e semantiche della logica proposizionale e predicativa, dalla teoria della dimostrazione e dei modelli del primo ordine, fino alla dimostrazione analitica dei loro principali metateoremi. Il libro si rivolge a studenti di matematica, filosofia, informatica e ingegneria.

Simone Cuconato è ricercatore postdoc in Logica presso il Dipartimento di Fisica dell'Università della Calabria, dove insegna Matematica e Informatica Applicate alle Scienze della Salute. I suoi interessi di ricerca includono la teoria della dimostrazione, le logiche modali, l'intelligenza artificiale e la filosofia e la storia della matematica.

9 791280 064868

ISBN 979–12–800–6486–8

IL Sileno Edizioni

Philosophies of Communication